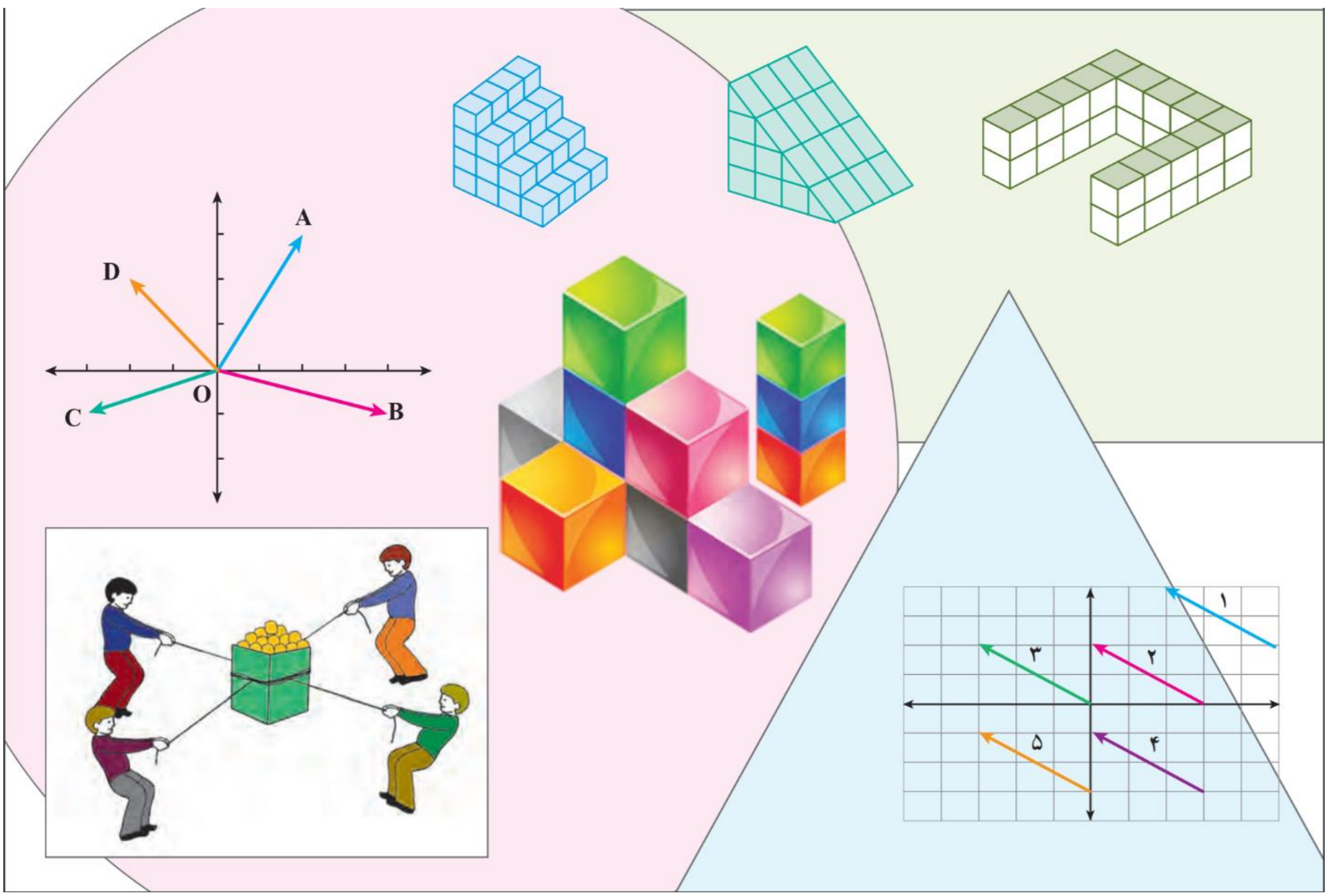
بسم الله الرحمن الرحیم

اَللّٰهُمَّ صَلِّ عَلیٰ مُحَمَّدٍ وَ آلِ مُحَمَّدٍ وَ عَجِّلْ فَرَجَهُمْ

درس نامه های ریاضی پایه هفتم

دوره اوّل متوسطه

همکاران ناحیه یک زاهدان



مقدمه

یادگیری ریاضی پیرو اصول و قوانینی است که توجه به آنها کار فراگیری را آسان می کند. هدف از ایجاد درسنامه ها این هست که دانش آموزانی که توانایی حضور فیزیکی در مدارس و دسترسی به فضای مجازی ندارند، بتوانند با مراجعه به مدرسه از آن کپی گرفته و در منزل مطالعه کنند.

از همه ی عزیزانی که در تهیه این فایل ما را همراهی کردند، تشکر میکنم. کلماتی در خور ادای دین شما عزیزان، در قدردانی از زحمات شما تلاشگران فداکار که علی رغم تمام سختی های تدرس حضوری و مجازی و مصائب زندگی، دلسوزانه یاری گر ارتقای سطح آموزشی هستید، نمی یابم. دست مریزاد و درود بر همت بلندتان.

فصل اول	راهبردهای حل مسئله	**بهناز مجیدیانی**	مدرسه راهیان نور
فصل دوم	عددهای صحیح	**بهناز مجیدیانی**	مدرسه راهیان نور
فصل سوم	جبر و معادله	**علیرضا رنجبر کیخا**	سرگروه
فصل چهارم	هندسه و استدلال	**حمیده قاضی**	مدرسه فرهنگیان
فصل پنجم	شمارنده ها و اعداد اول	**طیبه رحیمی**	مدرسه هدایت
فصل ششم	سطح و حجم	**زهرا بومری**	مدرسه شهدای محراب
فصل هفتم	توان و جذر	**سلیمه الله دینی**	مدرسه ۲۲ بهمن
فصل هشتم	بردار و مختصات	**محمد مشهدی**	مدرسه شهید مفتح
فصل نهم	آمار و احتمال	**علیرضا جوادی مقدم**	مدرسه تیزهوشان شهید بهشتی ۱ و ۲

علیرضا رنجبر کیخا

سرگروه ریاضی متوسطه اول

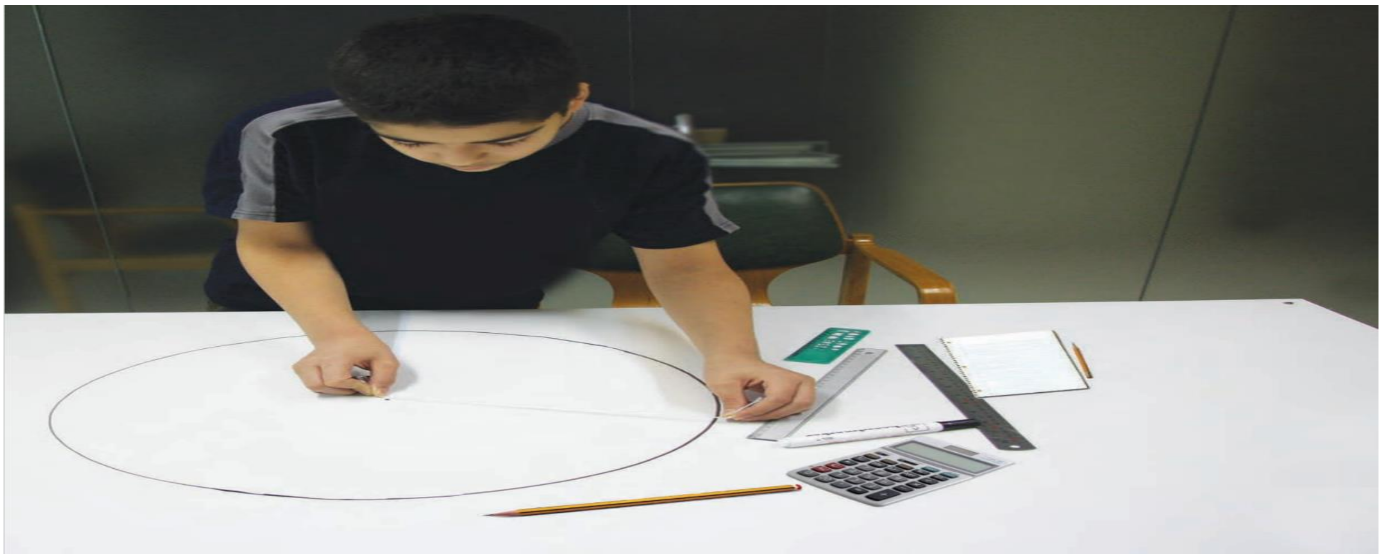
ناحیه ۱ زاهدان

فهـرست مطالـب

عنوان | صفحه

فصـــل ۱

راهبردهای حل مسئله



هدف کلی:

بالا بردن قدرت حل مسئله و به کارگیری راهبردهای حل مسئله

انتظارات از دانش آموزان در این درس

۱ در مورد تنوع در جهان آفرینش تفکر کند و مهارت های فرآیند تفکر را پیدا کند

۲ نسبت به حل مسئله نگرش مثبت پیدا کند

۳ مسائل ریاضی را با این راهبردها حل کند

۴ در مدل سازی ریاضی از موقعیت های مدل گونه، حل مدل و یافتن حل درمسائل واقعی استفاده کند

۵ برای انجام اخلاق پسندیده از قبیل رعایت حقوق دیگران ،نظم در کلاس ،همکاری وتلاش کند و به دیگران نیز توصیه کند

چگونه مسئله را حل کنیم؟

حل کردن مسئله چهار مرحله دارد:

1. فهمیدن مسئله
2. انتخاب راهبرد مناسب
3. حل مسئله
4. بازگشت به عقب

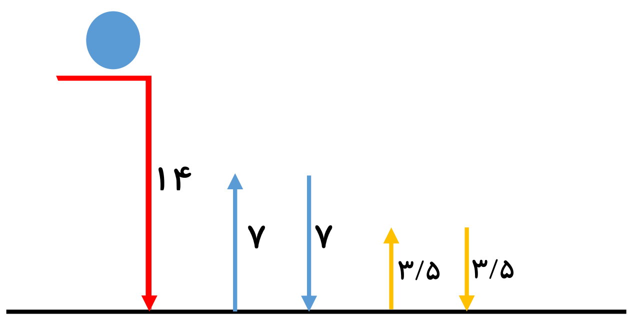
انواع راهبردها

- رسم شکل
- الگو سازی
- حذف حالت های نامطلوب
- الگویابی
- حدس و آزمایش
- زیر مسئله
- حل مسئله ساده تر
- روش های نمادین

۱ رسم شکل

برای حل بعضی از مسائل می‌توان با رسم شکل ساده آن را حل کرد.

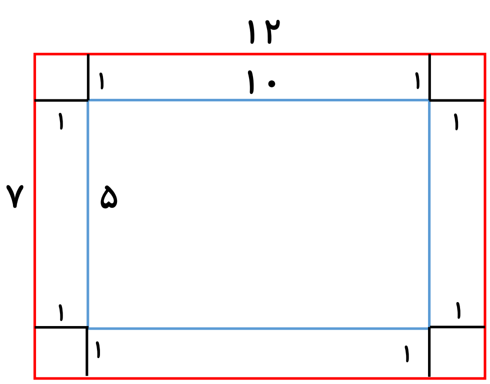
مثال : توپ از ارتفاع ۱۴ متری به پایین پرتاب شده است. توپ هر بار که به زمین می خورد نصف ارتفاع قبلی بالا می‌آید از لحظه رها شدن تا سومین باری که به زمین میخورد چند متر حرکت کرده است؟



۱۴ + ۷ + ۷ + ۳/۵ + ۳/۵ = ۳۵

متر حرکت کرده

مثال : یک باغچه مستطیل شکل به طول ۱۰ و عرض ۵ متر است .اگر به فاصله یک متر از ضلع های باغچه دور تا دور آن نرده بکشیم چند متر احتیاج داریم ؟



طول جدید : ۱۰ + ۲ = ۱۲

عرض جدید : ۵ + ۲ = ۷

محیط دور تا دور : ۱۲ + ۱۲ + ۷ + ۷ = ۳۸

باغچه　　۱۲ + ۷ = ۱۹ × ۲ = ۳۸

متر نرده نیاز داریم

۲ راهبرد الگو سازی

برای حل بعضی از مسائل می‌توان همه حالت‌های ممکن را در یک جدول نظام دار نوشت.

مثال : دو عدد طبیعی پیدا کنید که حاصل ضرب آنها ۱۸ و حاصل جمع آن ها کمترین مقدار باشد؟

مجموع	عدد دوم	عدد اول
۱۸+۱=۱۹	۱۸	۱
۹+۲=۱۱	۹	۲
۶+۳=۹ ✓	۶	۳
	۳	۶

۳ راهبرد حذف حالت های نامطلوب

برای حل بعضی از مسائل یک جدول نظام دار همه حالت‌ها را نوشته و حالت هایی که با توجه به صورت مسئله نادرست است (حالت های نامطلوب) را کنار می گذاریم.

مثال : حاصلضرب سه عدد طبیعی ۶۰ و حاصل جمع آن ها ۱۸ شده است بزرگترین عدد کدام است؟

ابتدا اعدادی که ضرب آن ها ۶۰ می‌شود را پیدا کرده

مجموع اعداد	عدد سوم	عدد دوم	عدد اول
۳۳ ✗	۳۰	۲	۱
۲۴ ✗	۲۰	۳	۱
۲۰ ✗	۱۵	۴	۱
۱۸ ✓	۱۲	۵	۱
۱۷ ✗	۱۰	۶	۱

۴ راهبرد الگو یابی

در بعضی از مسائل که الگوی رابطه خاصی به این شکلها یا اعداد باشد از الگویابی استفاده می‌کنیم.

مسائلی که به صورت عددی هستند را با الگوی عددی
حل کرده
مسائلی که به صورت اشکال هستند را با الگوی هندسی

مثال : سه عدد بعدی هر الگو را بنویسید. (الگوی عددی)

الگو: اعداد سه تا سه تا اضافه شده

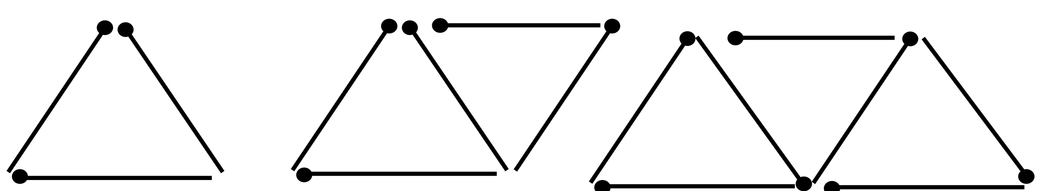
الف) ۴ و ۷ و ۱۰ و ....۱۳ و ....۱۶ و ۱۹

الگو: اعداد طبیعی سه بار در خودش ضرب شده

ب) ۱ و ۸ و ۲۷ و ....۶۴ و ....۱۲۵ و ۲۱۶

۱×۱×۱　　۲×۲×۲　　۳×۳×۳

مثال: شکل هفتم دارای چند چوب کبریت است؟ (الگوی هندسی)



(۱)　　(۲)　　(۳)　　(۴)

الگو: اعداد دو تا دو تا اضافه شده

تعداد چوب کبریت = عددی ± (فاصله عددی × شماره شکل)

(۱ × ۲) + ۱ = ۳

(۲ × ۲) + ۱ = ۵　　　(۷ × ۲) + ۱ = ۱۵

(۵)　　(۶)　　(۷)

(۳ × ۲) + ۱ = ۷

۵ راهبرد روش نمادین

بعضی از مسائل را می‌توان با نمادهای جبری (معادله یا مدلسازی هندسی)حل کرد.

مثال : زهرا برای خرید ۴ کتاب ۱۵ هزار تومان به فروشنده داد و ۶۰۰ تومان پس گرفت.

برای حل این مسئله رابطه مقابل را می‌نویسیم سپس جواب راحدس می زنیم و به جای قیمت که نمی‌دانیم جای خالی گذاشته.

۴ × ◯ + ۶۰۰ =۱۵۰۰۰

حدس و آزمایش	قیمت کتاب
۴×۲۰۰۰+۶۰۰=۸۶۰۰	۲۰۰۰
۴×۲۵۰۰+۶۰۰=۱۰۶۰۰	۲۵۰۰
۴×۳۵۰۰+۶۰۰=۱۴۶۰۰	۳۵۰۰
۴×۳۶۰۰+۶۰۰=۱۵۰۰۰ ✓	۳۶۰۰

۶ راهبرد حدس و آزمایش

در بعضی از مسائل با یک روش منطقی راه حل مسئله راحدس زد و سپس حدس خود را بررسی تا به جواب مسئله نزدیک شویم.

مثال : در یک مزرعه ۱۶ مرغ و گاو است اگر تعداد پاهای آنها ۴۲ باشد در این مزرعه چندگاوو چند مرغ وجود دارد؟

نکته: تعداد پاهای گاو ۴تا

تعداد پاهای مرغ ۲تا

	حدس و آزمایش	تعداد پا گاو	تعداد پا مرغ
✗	۸×۲+۸×۴=۴۸	۸	۸
✗	۱۰×۲+۶×۴=۴۴	۶	۱۰
✓	۱۱×۲+۵×۴=۴۲	۵	۱۱

۷ راهبرد زیر مسئله

یعنی مسائل پیچیده و چند مرحله را به چند زیرمرحله تبدیل کرد .

مثال: علی ۴۲۰۰ تومان پول دارد و می‌خواهد ۱۱ خودکار و با باقیمانده پولش مداد بخرد قیمت هر خودکار ۳۰۰ و قیمت هر مداد ۱۲۰ تومان است.علی چند مداد می‌توانند بخرند و چند تومان باقی می‌ماند؟

الف) پول خرید خودکار (زیر مسئله اول)	۱۱×۳۰۰=۳۳۰۰

ب) باقی مانده پول (زیر مسئله دوم)	۴۲۰۰-۳۳۰۰= ۹۰۰

ج) تعداد خرید مواد و باقیمانده (زیر مسئله سوم)	۹۰۰ ÷ ۱۲۰=۷

و ۶۰ تومان باقی مانده است .

۸ راهبرد حل مسئله ساده تر

برای راهبرد حل بعضی از مسائل می‌تواند تداوم اصلی ساده‌تری که با مسئله اصلی در ارتباط است حل کنیم

مثال : حاصل عبارت زیر را به دست آورید؟

$$\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)\times\left(۱-\frac{۱}{۳}\right)\times\left(۱-\frac{۱}{۴}\right)\times\ldots\times\left(۱-\frac{۱}{۱۰۰}\right)$$

ابتدا هم مخرج کرده:

$$۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

$$۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

$$۱-\frac{۱}{۱۰۰}=\frac{۹۹}{۱۰۰}$$

$$\frac{۱}{\cancel{۲}_{۱}}\times\frac{\cancel{۲}^{۱}}{\cancel{۳}_{۱}}\times\frac{\cancel{۳}^{۱}}{۴}\times\ldots\times\frac{۹۹}{۱۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}$$

مخرج هر کسری با صورت کسر بعدی خط خورده و ساده می شود

۱دور باغچه ای مستطیل شکل به طول۷m و عرض۴m به فاصله۳m طنابی کشیده ایم. طول طناب را به دست آورید.(راهبرد رسم شکل)

۲ اگر دو زاویه مکمل یکدیگر باشند ،در چه حالتی یکی چهار برابر دیگری خواهد بود؟(راهبرد حدس و آزمایش)

۳ با سکه های ۵۰ تومانی و ۱۰۰ تومانی به چند حالت می توان ۳۵۰ تومان را پرداخت کرد؟ (راهبرد الگو سازی)

۴ حاصل ضرب سن سه نفر ۳۰ و حاصل جمع سن آنها ۱۲ سال می باشد، سن تمام نفرات را به دست آورید. (راهبرد حذف حالت های نامطلوب)

۵ داود کتابی را به مدت ۵ ساعت مطالعه کرد. ۱۵ صفحه از آن باقی مانده است. اگر این کتاب ۹۰ صفحه داشته باشد، داود به طور متوسط هر ساعت چند صفحه از آن را مطالعه کرده است؟ (راهبرد زیر مسئله)

۶اگر در یک پارکینگ ۴۰ اتومبیل و موتور سیکلت وجود داشته باشد و تعداد چرخ های آنها ۸۲ تا باشد .چند اتومبیل و موتور سیکلت در این پارکینگ موجود است؟ (راهبرد حدس و آزمایش)

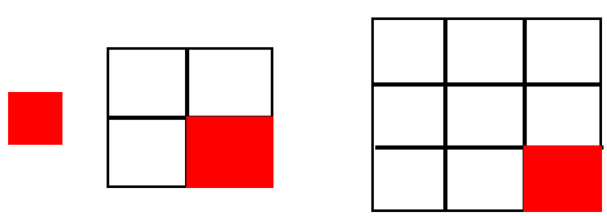
۷ کشاورزی نصف زمین خود را لوبیا و $\frac{2}{3}$ باقی مانده ی زمین را پیاز و $\frac{1}{2}$ باقی مانده دیگر را سویا کاشته است.او چه کسری از زمین خود را نکاشته است؟ (راهبرد رسم شکل)

۸ حاصل عبارت مقابل را پیدا کنید. (راهبرد زیر مسئله)

$$1\frac{1}{2}\times 1\frac{1}{3}1\times\frac{1}{4}1\times\ldots\times\frac{1}{200}=$$

۲

۹اگر شکل ها را به همین ترتیب ادامه دهیم، چه کسری از شکل ششم رنگ می شود؟ (راهبرد الگویابی)



فصـل ۲
عددهای صحیح

هدف کلی:

آشنایی دانش آموزان با اعداد صحیح و عملیات آنها

انتظارات از دانش آموزان در این درس

۱ در مورد نظم در آفرینش و طبیعت تر برکند

۲ روحیه حقیقت جویی و صداقت علمی پیدا کند

۳ شناخت اعداد صحیح ،محور آن ،قرینه آن و بیان خاصیت های آن

٤ فرضیه سازی کرده و آن ها را رد یا قبول کند

۵ برای انجام اخلاق پسندیده از قبیل رعایت حقوق دیگران ،نظم در کلاس ،همکاری وتلاش کند و به دیگران نیز توصیه کند

معرفی اعداد علامت دار

در سال گذشته با نمایش عدد های صحیح روی محور آشنا شدید و آموختید که :

۱ عدد های صحیح به سه دسته تقسیم می شوند :

الف)عددهای صحیح مثبت		ب) عدد صفر		ج)عدد های صحیح منفی

۲ عدد صفر نه مثبت و منفی است .

۳ عدد های صحیح که علامت ندارند مثبت هستند و همان اعداد طبیعی هستند.

$+۱۱ = ۱۱$		$+۴ = ۴$

۴ عددهای صحیح مثبت از عددهای صحیح منفی بزرگترند.

$-۵ < +۱۰$

۵ عددهای صحیح مثبت از صفر بزرگترند.

$۰ < +۱۰$

۶ عدد صفراز اعداد صحیح منفی بزرگتر است.

$-۵ < ۰$

۷ اعداد هر چه روی محور چپ تر باشند کوچکتر هستند.

$-۱۰۰۰ < -۲$		$-۵۰۰ < -۵$

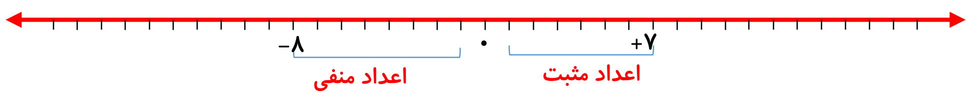
محور اعداد صحیح

برای نمایش اعداد صحیح از محور روبرو استفاده می کنیم.

الف) عدد صفر به عنوان مبدا در وسط محور قرار دارد .

ب) اعداد مثبت سمت راست صفر قرار دارند .

ج) اعداد منفی سمت چپ صفر قرار دارند.



نکته: روی محور هرچه به سمت راست پیش می‌رویم عدد ها بزرگ‌تر می‌شوند.

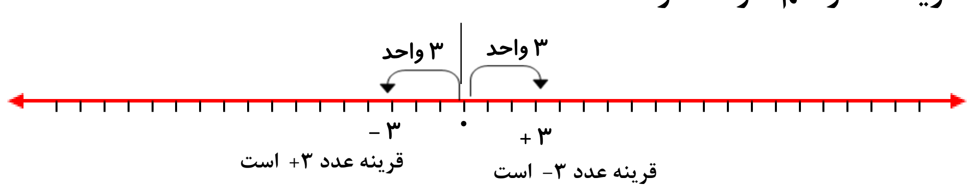
−۱۰۰ > −۱۰۰۰   −۱ > −۳   +۲ > −۴   +۸ > +۴

قرینه اعداد صحیح

روی محور اعداد صحیح هر عدد نسبت به مبدا (یعنی نقطه صفر) یک قرینه دارد.

نکته ۱: قرینه هر عدد منفی عددی مثبت و قرینه هر عدد مثبت عددی منفی است.

نکته ۲ : قرینه صفر هم خود صفر است .



(−۳) = +۳   (+۳) = −۳

برای نمایش قرینه هر عدد از نماد منفی (−)در سمت چپ استفاده می شود .

$-(-۱۰۰۰) = +۱۰۰۰$　و　$-(-۷) = +۷$　و　$-(+۳) = -۳$

نماد قرینه

نکته: قرینه قرینه هر عدد با خود آن عدد برابر است .

$-(-(+۶)) = +۶ \quad \rightarrow \quad -(-(+۶)) = -(-۶) = +۶$

نکته: اگر تعداد منفی های پشت یک عدد زوج باشد خود آن عدد می شود و اگر تعداد منفی های

پشت یک عدد فرد باشد حاصل قرینه آن می شود.

$-\Big(-\Big(-\Big(-\big(-(+۵)\big)\Big)\Big)\Big) = -۵$

۱　۲　۳　۴　۵

تعداد فرد

و

تعداد زوج

$-(-(-(-(+۵)))) = +۵$

۱　۲　۳　۴

حرکت روی محور اعداد صحیح

هر حرکت روی محور اعداد صحیح را با یک عدد علامت دار یا صفر بیان می کنیم.

❄ علامت عدد جهت حرکت و مقدار آن بدون در نظر گرفتن علامت اندازه حرکت را نشان می دهد.

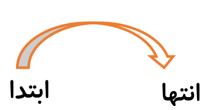
❄ اگر حرکت به سمت راست باشد علامت مثبت میشود.

❄ اگر حرکت به سمت چپ باشد علامت منفی میشود .

❄هر بردار روی محور اعداد یا هرحرکت محور از سه قسمت تشکیل می شود:

الف) ابتدای حرکت : محل شروع حرکت است .

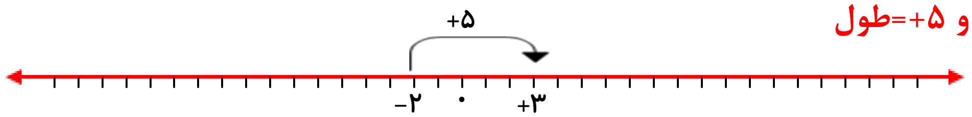
ب) اندازه (طول)حرکت: مقدار حرکت است.



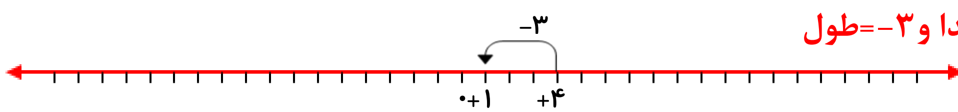
ج) انتهای حرکت :پایان حرکت که با پیکان فلش نمایش داده می شود .

مثال : برای حرکت یک عدد علامت دار (مثبت یا منفی) بنویسید.

+۳=انتها و −۲=ابتدا و +۵=طول



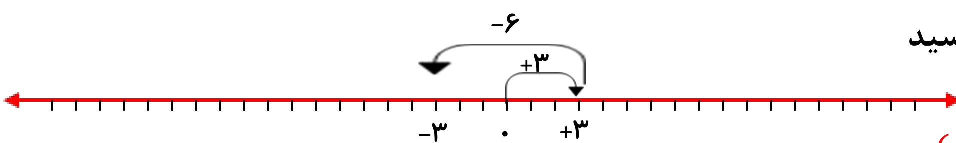
+۱=انتها و +۴=ابتدا و−۳=طول



جمع و تفریق عددهای صحیح

*جمع: وقتی روی محور دو حرکت پشت سر هم که شروع یکی از آنها مبدا است انجام شود

می‌توانیم یک جمع بنویسید



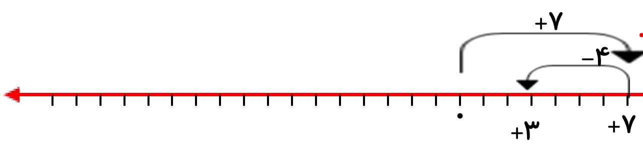
$(+۳) + (−۶) = (−۳)$

نکته : حاصل جمع (جواب)عدد مربوط به انتها حرکت(بردار) دوم است .

مثال : با کمک محور حاصل جمع اعداد صحیح را به دست آورید.

حرکت اول از مبدا (صفر)انجام می‌شود .

حرکت دوم از انتهای حرکت اول انجام می‌شود.



$(+۷) + (−۴) = (+۳)$

❋تفریق :

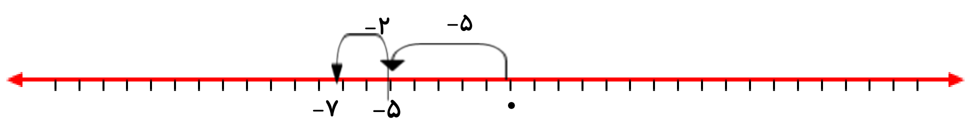
هر تفریق را میتوانیم به صورت جمع بنویسیم.　　　۵ − ۷ = ۵ + (−۷)

برای به دست آوردن حاصل تفریق دو عدد ابتدا باید تفریق را تبدیل به جمع کنیم .

❋تبدیل تفریق به جمع:

برای تبدیل تفریق به جمع ابتدا عدد صحیح اول را نوشته علامت تفریق را تبدیل به جمع کرده و قرینه عدد دوم را می‌نویسیم سپس با کمک محور حاصل جمع را پیدا می کنیم.

(−۵) − (+۲) ⟶ (تبدیل تفریق به جمع) (−۵) + (−۲) ⟹ (روی محور نمایش داده) −۷



خاصیت های جمع اعداد صحیح

الف) **جمع عدد با صفر :** حاصل جمع هر عدد صحیح با صفر خود آن عدد است.

مثال)　　۰ + (−۴) = (−۴)　　و　　(+۵) + ۰ = (+۵)

ب) **جمع عدد با قرینه خودش :** حاصل جمع هر عدد با قرینه اش برابر با صفر است.

مثال)　　(+۱۲) + (−۱۲) = ۰　　و　　(−۵) + (+۵) = ۰

ج) **گستره اعداد صحیح :** مانند اعداد طبیعی گسترده اعداد صحیح را نیز می توان نوشت.

مثال)　　۵۴۱ = ۵۰۰ + ۴۰ + ۱　　　−۴۲۷ = (−۴۰۰) + (−۲۰) + (−۷)

جمع اعداد صحیح

دردرسنامه اول جمع و تفریق به کمک محور گفته شد.

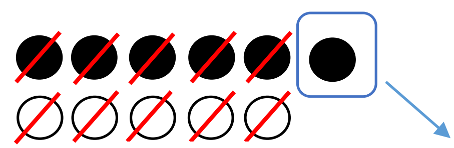
در این درسنامه ۳ روش دیگر برای حاصل جمع و تفریق گفته می‌شود .

روش اول: جمع و تفریق به کمک دایره های سفید ○ (توخالی)و دایره های سیاه ● (تو پر)

-اگر هر دایره سفید○ نشان دهنده ۱+ و هر دایره سیاه● نشان دهنده ۱- باشد وقتی آن دو را روی هم داخل یک ظرف قرار دهیم (با هم جمع کنیم) حاصل برابر صفر می‌شود.

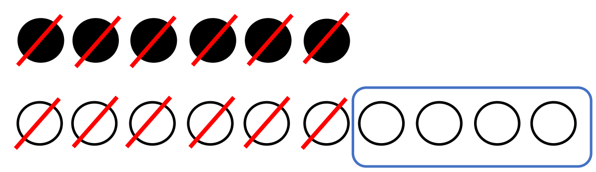
مثال : حاصل جمع و تفریق ها را به دست آورید؟

الف) ۱- = ۵ + ۶-

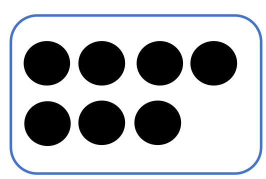


دایره های باقی مانده ۱- حاصل را نشان می دهد

ب) ۴+ = (۶-) + ۱۰+



ج) (۳+) − ۴- $\xrightarrow{\text{تبدیل به جمع}}$ ۷- = (۳-) + ۴-



روش دوم: مختصر نویسی

دو عدد را با علامت شان بدون پرانتز و در نظر گرفتن علامت جمع وسط دو عدد می نویسیم.

اگر دو عدد هم علامت باشند دو عدد را جمع می‌کنیم .

اگر دو عدد مختلف علامت باشند و دو عدد را از هم تفریق می کنیم.

و در پایان برای جواب (حاصل)علامت عدد بزرگتر را می‌گذاریم .

نکته ۱ : در جمع اعداد صحیح

- اگر هم علامت باشند
  - هر دو عدد مثبت (+) با هم جمع می شوند
  - هر دو عدد منفی (-) با هم جمع می شوند
- اگر مختلف العلامت :یکی مثبت و یکی منفی از هم کم می شوند

نکته ۲ : عدد بزرگتر منظور بدون در نظر گرفتن علامت مثلاً بین(۱۲ -) و (۸+) بدون در نظر گرفتن علامت ها عدد۱۲ بزرگتر است.

مثال : حاصل جمع های زیر را حساب کنید.

هم علامت ها با هم جمع می شوند

هم علامت:

علامت عدد بزرگ

(+۷) + (+۵) = +۷ +۵ = +۱۲

(−۸) + (−۹) = −۸ −۹ = −۱۷

علامت عدد بزرگ

مختلف العلامت ها از هم تفریق می شوند

مختلف العلامت:

علامت عدد بزرگ

(−۱۲) + (+۸) = −۱۲ +۸ $\xrightarrow{۱۲-۸=۴}$ −۴

(+۹) + (−۶) = +۹ −۶ $\xrightarrow{+۹-۶=+۳}$ +۳

علامت عدد بزرگ

روش سوم: با کمک جدول ارزش مکانی

دو عدد را با توجه به جدول ارزش مکانی آنها در جدول قرار داده و علامت هر عدد را کنار جدول گذاشته و اعداد را ستونی با هم جمع کرده از روش مختصر نویسی کمک گرفته .

مثال : حاصل جمع های زیر را حساب کنید؟

الف) $(+48) + (-57) = -9$

اول گسترده کرده

$+40+8$

$-50-7$

در جدول قرار داده

یکان	دهگان
+۸	+۴۰
-۷	-۵۰

+۸+۴۰

-۷-۵۰

$(-10) + (+1) = -9$

ب) $(-73) + (+82) + (-25) = -16$

یکان	دهگان
-۳	-۷۰
+۲	+۸۰
-۵	-۲۰

$-70 + 80 - 20 = -10$

$-3 + 2 - 5 = -6$

$-10 + (-6) = -16$

ج) $(+254) + (-371) = -117$

یکان	دهگان	صدگان
+۴	+۵۰	+۲۰۰
-۱	-۷۰	-۳۰۰
+۳	-۲۰	-۱۰۰

$-100-20+3 = -117$

$+254 = +200 + 50 + 4$

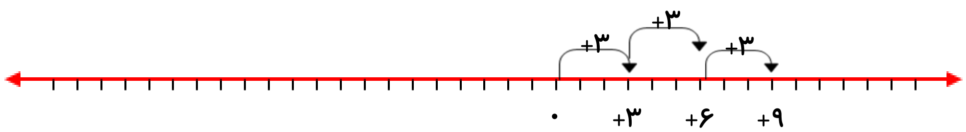
$-371 = -300 + (-70) + (-1)$

ضرب عددهای صحیح

روش اول : از روی محور اعداد

در جمع و تفریق عددهای صحیح اگر تعداد حرکت یک اندازه در یک جهت داشته باشیم میتوان جمع را به ضرب تبدیل کرد و برای این کار کافیست :

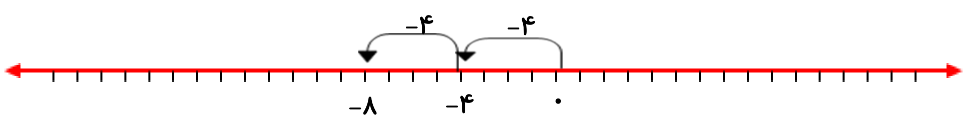
تعداد حرکت را در عددی که هر حرکت نشان می‌دهد ضرب کنیم.



جمع : ‎+۳ +۳ +۳ = +۹‎

ضرب : ‎۳ × (+۳) = +۹‎

تعداد حرکت　　　عدد روی هر حرکت



جمع : ‎(−۴) + (−۴) = −۸‎

ضرب : ‎۲ × (−۴) = −۸‎

تعداد حرکت　　　عدد روی هر حرکت

روش دوم :ضرب و تقسیم اعداد صحیح

در ضرب و تقسیم اعداد صحیح ابتدا ضرب علامت ها را انجام می دهیم و سپس با توجه به عمل بین آنها دو عدد را ضرب یا تقسیم می کنیم.

قاعده ضرب و تقسیم علامت های دو عدد

منفی = منفی (× ÷) مثبت

مثبت = مثبت (× ÷) مثبت

منفی = مثبت (× ÷) منفی

مثبت = منفی (× ÷) منفی

مثال : حاصل ضرب و تقسیم های زیر را به دست آورید.

ج) (+۲۴) ÷ (+۸) = +۳

الف) (− ۱۲) × (+۴) = − ۴۸

د) (+۳۶) ÷ (−۹) = −۴

ب) (− ۱۰) × (−۵) = + ۵۰

مثال : حاصل هر عبارت را پیدا کنید.

الف) (−۷) + ((+۴) + (+۵)) = (−۷) + (+۹) = +۲

هم علامت :جمع　　مختلف العلامت : کم

ب) ((−۲) + (+۳)) × (−۵)= (+۱) × (−۵) = (−۵)

مختلف العلامت : کم　　مثبت　　منفی

ج) ((+۲)+ (−۱۷)) ÷ (−۵) = (−۱۵) ÷ (−۵) =+۳

مختلف العلامت : کم　　منفی　　منفی

د) (~~−۶+۱۲~~−۱۸) × (−۵) = (−۱۲) × (−۵) =+۶۰

−۱۲　　منفی　　منفی

۱) درستی ☑ یا نا درستی ☒ عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) حاصل ضرب هر دو عدد منفی عددی منفی است.

ب) قرینه ی ،قرینه ی هر عدد برابر با خود عدد است.

پ) تمام اعداد صحیح منفی از صفر کوچک تر هستند.

ت) حاصل جمع دو عدد منفی همواره یک عدد مثبت است.

ث) قرینه ی اعداد صحیح منفی همان اعداد طبیعی هستند.

۲) در جای خالی عدد یا کلمه مناسب بنویسید.

الف) در تفریق اعداد صحیح عدد اول با .... عدد دوم جمع می شود.

ب) حاصل ضرب هر عدد مثبت در عدد منفی عددی .... است.

پ) حاصل عبارت ۵-۴-۳-۲-۱- برابر با عدد .... است.

ت) بزرگ ترین عدد صحیح منفی دو رقمی عدد .... است.

ث) حاصل تقسیم هر عدد مثبت بر عدد منفی عددی .... است.

۳) گزینه صحیح را انتخاب کنید.

❄) حاصل عبارت (۸-۳) برابر است با :

الف) ۵+ ب) ۵- ج) ۱۱+ د) ۱۱-

❄) اگر دمای هوای شهر مشهد ۴ درجه زیر صفر و دمای هوای بیرجند ۵ درجه سردتر از مشهد است دمای هوای بیرجند برابر است با :

الف) ۳- ب) ۹- ج) ۳+ د) ۹+

❄) فاصله عدد ۷ با قرینه خود چند واحد است؟

الف) ۷ واحد ب) ۸ واحد ج) ۱۴ واحد د) صفر

❄) قرینه عدد ۴ نسبت به عدد ۱- کدام عدد است؟

الف) ۴- ب) ۶- ج) ۵- د) ۳-

❄) دمای هوای تهران در یک روز زمستانی ۵ درجه زیر صفر و در همان روز دمای هوای تبریز ۹ درجه زیر صفر بوده است اختلاف دمای دو شهر کدام است؟

الف) ۴ درجه ب) ۱۴ درجه ج) ۷ درجه د) ۲ درجه

❄) در یک روز پاییزی دمای هوای لاهیجان ۳ درجه بالای صفر و در همان روز اردبیل ۸ درجه سردتر از لاهیجان بود میانگین دمای دو شهر کدام است؟

الف) ۵- ب) ۱۱ ج) ۲- د) ۱-

❋)حاصل عبارت زیر کدام است؟

$-۱-۳-۵-۷-...-۷۹$

الف)۶۲۴۱-　　ب)۶۴۰۰-　　ج)۱۷۶۴-　　د)۱۶۰۰-

❋) حاصل عبارت زیر کدام است؟

$(-۲۱+۹۹) \times (-۲۱+۹۸) \times ... \times (-۲۱+۳) \times (-۲۱+۲)$

الف)۱۹- × ۱۸- × ۱۷- × ... × ۷۸　　ب)صفر　　ج) ۱　　د) ۱-

❋)حاصل عبارت زیر کدام است؟

$-۴۵-۴۴-۴۳-...-۱+۰+۱+۲+...+۴۳$

الف) ۸۹-　　ب) ۸۹　　ج) صفر　　د) ۴۵-

۴) حاصل جمع و تفریق های زیر را بدست آورید.

الف) به کمک محور اعداد صحیح

$(-۷)-(-۳)=$

$(-۹)+(-۵)=$

ب) به کمک دایره های تو پر و تو خالی

$(+۴)+(-۷)=$

$(+۵)-(-۸)=$

پ) به روش قاعده ها

$(-۱۳)+(+۲۴)=$

$(-۸۷)-(-۶۱)=$

$(-۱۳)-(-۷)=$

$(+۱۹)+(+۱۳)=$

$(-۲۹)+(-۵۴)=$

$(-۴۳)-(+۷۷)=$

$(+۱۹)-(+۱۳)=$

$(-۱۷)+(-۵)=$

۵) حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

$-۱۵+۷\times ۳-۱۲=$

$[-۶-(+۲۲)]\times[(-۳۶)\div(-۹)]=$

$[(-۱۲)-(-۷)]\div[(-۵)+(+۱۰)]=$

$-۲۴+۱۲-۳۵-۵۴=$

$((-۳۶)-(-۵۴)) \div (۱۵-۲۴)=$

$[۲-(-۱۶)-(+۴)] \div (-۷) =$

$۴-۴\,[۲۳-(۴\times۸)+۷] =$

$[(-۱۲)\div(-۲)] \times [-۸-(-۲۴)]=$

$[(-۴۵)-(-۱۵)] \div [(-۲)\times(+۳)] =$

$[(-۴۳)-(-۱)] \div (۲\times۳) =$

$-۴۳ -۲۱ +۳۵ -۲۴ =$

$(-۱ -۹ -۱۴) \div (-۲\times۴) =$

۶/۱) دمای هوای لنگرود در یک شبانه روز حداکثر ۱۲ درجه بالای صفر و حداقل ۴ درجه زیر صفر بود میانگین دمای هوای لنگرود چند درجه بوده است؟

۶/۲) در یک روز زمستانی دمای هوای شهر تهران ۸ درجه زیر صفر و دمای تبریز در همان روز ۴ درجه سرد تر از تهران است. دمای هوای تبریز چند درجه است؟

میانگین دمای تبریز و تهران را بدست آورید؟

۶/۳) در یک روز دمای هوای همدان ۱۲- و دمای هوای اردبیل ۱۸- بوده است هوای اردبیل چند درجه سردتر از همدان بوده است؟

۷) در جای خالی عدد مناسب بنویسید.

$(\quad) \times (-۶) = -۵۴$

$(-۴۸) \div (\quad) = -۳$

$(-۳) \times (\quad) = +۵۷$

$(\quad) \times (-۳) = -۲۴$

۸) کسرهای زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$\frac{(-۵۴) \times ۴۵}{(۳۵) \times (-۷۲)} =$$

$$\frac{(-۴۵) \times (+۲۸)}{(+۲۱) \times (-۵۴)} =$$

فصــل ۳
جبــر و احتــمال

هدف کلی:

شناخت مفهوم عبارات جبری و معادله و کاربرد آن در ریاضی و حل مسائل

انتظارات از دانش آموزان در این درس:

۱ عبارات کلامی را به صورت جبری بنویسد.

۲ جمله ی n ام در یک الگوی عددی را بدست آورد.

۳ جملات متشابه را بشناسد و جمع و تفریق آنها را انجام دهد.

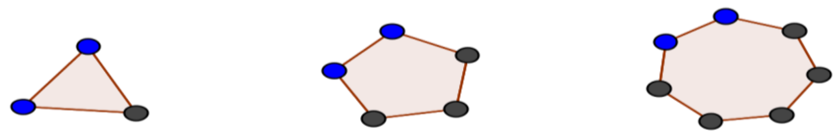
۴ مقدار عددی یک عبارت جبری را به ازای اعداد داده شده بدست آورد.

۵ بتواند معادله را حل کند.

درس اول: الگوهای عددی

در سال های گذشته در مبحث الگوهای عددی، یاد گرفتید ارتباط بین شماره شکل و تعداد شکل را بنویسید.

مثال: در شکل های زیر رابطه بین تعداد راس های هر شکل و شماره شکل را بیابید.


شکل شماره ۳　　شکل شماره ۲　　شکل شماره ۱

در بالا شکل شماره یک سه راس دارد، شکل شماره دو پنج راس دارد و شکل شماره سه هفت راس دارد. همانطور که می بینید اگر شماره شکل را دو برابر کنیم و یکی به آن اضافه کنیم تعداد راس ها بدست می آید.

بنابراین می توان فرمول رابطه شماره شکل و تعداد راس ها را به صورت زیر بنویسیم.

۱+شماره شکل×۲ = تعداد راس ها

درس دوم: عبارات جبری

در درس زبان انگلیسی برخی نوشتن حروف را یاد گرفتید. به عباراتی که از حروف انگلیسی در نوشتن آنها استفاده می شود عبارت جبری می گویند.

به عنوان مثال در مثال قبلی رابطه تعداد راس ها و شماره شکل را نوشتیم. شما می توانید برای راحتی کار بجای نوشتن کلمات فارسی در یک فرمول و رابطه، از عبارات جبری (حرفهای انگلیسی) استفاده کنید. اینکه از کدام حرف انگلیسی استفاده کنید اختیاری است. اما توصیه می شود در الگوهای عددی از حرف انگلیسی n بجای شماره شکل استفاده کنید. بنابراین رابطه بالا را میتوان به صورت جبری به شکل زیر نوشت:

$۲\times n+۱$=تعداد راس ها

حتی می توان به جای تعداد راس ها نیز یک حرف انگلیسی انتخاب کرد:

$$r=۲\times n+۱$$

در عبارات جبری مثل همین مثال $۲\times n$ را به صورت $۲n$ نیز نمایش می دهند. یعنی می توان نوشت:

$$r=۲n+۱$$

انتخاب حروف انگلیسی در مثال های زیادی کاربرد دارد. هر حرف انگلیسی نشان دهنده یک عدد می باشد و می توان عبارات کلامی زیادی را به صورت جبری نوشت.

به چند مثال در این زمینه توجه کنید:

مثال ۱ سه واحد بزرگتر از عددی $=a+۳$ (بجای عدد حرف a را انتخاب کردیم)

مثال ۲ پنج برابر عددی $=۵\times b$ یا $۵b$ (بجای عدد حرف b را انتخاب کردیم و می توانیم ضرب را نگذاریم)

مثال ۳ سه واحد کمتر از چهار برابر عددی $=۴k-۳$ (حرف k را انتخاب کردیم و ضرب بین ۴ و k را نگذاشتیم)

مثال ۴ ربع عددی $=\frac{t}{۴}$ یا $t\div۴$ (هر دو صورت نوشتن درست است)

مثال ۵ حاصلضرب دو عدد $=h\times d$ یا همان hd

نکته: دقت داشته باشید که فقط عمل ضرب بین عدد و حرف انگلیسی (k ×۴) و یا عمل ضرب بین

دو حرف انگلیسی (مثل $h \times d$) را میتوان ننوشت چون $۴k$ همان۴ برابر عدد k را معنی می دهد و در صورتی که عدد k مشخص باشد که چقدر است، میتوان عدد ۴ را در مقدار آن ضرب کرد و حاصل را بدست آورد. اما در مثال های بالا چون مشخص نشده چه عددی هستند نمی توان حاصل را محاسبه کرد

مثال : جمله n ام الگوهای عددی زیر را مانند نمونه بنویسید.

۲ و ۴ و ۶ و ۸ و .... پاسخ= ۲n

توضیح: ابتدا زیر هر عدد شماره میزنیم:

۲ و ۴ و ۶ و ۸ و

(۱) (۲) (۳) (۴)

سپس رابطه بین شماره و عدد را حدس میزنیم. در این مثال شماره اگر ضرب در ۲ شود عدد بدست می آید. بنابراین می توانیم بگوییم : هر عدد =۲×شماره آن عدد

و بجای شماره آن عدد در این عبارت حرف n بگذاریم: $۲\times n=$ که میتوان ضرب را ننوشت $=۲n$

تمرین: جمله nام موارد زیر را بنویسید.

۳و۶و۹و۱۲و...

۵و۱۰و۱۵و۲۰و...

۶و۱۱و۱۶و۲۱و...

۱و۴و۹و۱۶و۲۵و...

جملات متشابه

هر کدام از عبارات ۲ و ۵n و ۴k و $\frac{d}{۲}$ و y یک جمله هستند. اما هیچ کدام از آن ها باهم متشابه نیستند.

جملات متشابه جملاتی هستند که قسمت جبری (حرف انگلیسی آن ها) یکسان باشد. بعنوان مثال ۴n و ۳n- متشابه اند . یا عبارات۵k و ۷k- و k با هم متشابه اند. همچنین عبارات ۱۱ab و ۳ba نیز با هم متشابه اند (در قسمت جبری جابجایی حروف در یک جمله فرقی ایجاد نمی کند و ab برابر ba هست).

نکته: اگر یک عبارت جبری علامتی نداشته باشد مثبت است. **مثال:** ۵n = ۵n+

نکته: اگر عبارتی جبری ضریب عددی نداشته باشد، میتوان عدد یک را نوشت. **مثال:** k- = ۱k-

جمع و تفریق عبارات جبری

همیشه یادتان باشد عبارات جبری همگی قابل جمع و تفریق کردن نیستند. بلکه فقط عباراتی را می توان باهم جمع یا تفریق کرد که متشابه باشند یعنی قسمت انگلیسی (جبری) آنها یکی باشد.

مثلا عبارت ۳n+۵k- را نمی توان جمع یا تفریق کرد چون حروف متشابه نیستند و عبارت از این ساده تر نمی شود.

اما عبارات متشابه را می توان ساده کرد. مثلا ۳k+۵k- را می توان ساده کرد.

برای ساده کردن این عبارات قسمت ضریب عددی آنها را به صورتی که قبلا یاد گرفتیم ساده می کنیم (۲+= ۵+ ۳-) و سپس یکی از قسمت های جبری را مینویسیم.۳k+۵k=+۲k-

بر همین اساس عباراتی که قابل ساده شدن هستند در عبارات زیر ساده میکنیم و بقیه ای که ساده نمی شوند خودشان را مینویسیم. به این **مثال** ها توجه کنید:

(عباراتی که b داشتندومتشابه بودندراساده کردیم وبقیه رانوشتیم) $\underline{۷b} + ۳m \underline{- ۹b} = -۲b + ۳m$

$۵d + ۳k + ۱ + k + ۲ - ۳d = ۲d + ۴k + ۳$

توضیح: (عددهای ۱+و۲+ باهم و عبارات ۵d-۳d با هم و عبارات ۳k +k با هم ساده می شوند.)

ساده کردن عبارات جبری (۲)

نکته: اگر عدد یا علامتی به پشت پرانتز چسبیده باشد آن عدد یا علامت را در ضریب جملات داخل پرانتز ضرب میکنیم.

مثال: $\underline{۴}(-۳b + ۲m) = -۱۲b + ۸m$

در **مثال** بالا عدد ۴ هم در ۳b- و هم در ۲m+ ضرب میشود و ضرایب را چهار برابر می کند.

مثال: عبارت زیر را ساده کنید.

$\underline{-۳}(۲m + ۵k) \underline{-} (۳m - ۲k) =$

جواب: $-۶m - ۱۵k - ۳m + ۲k = -۹m - ۱۳k$

تمرین: عبارات جبری زیر را تا حد امکان ساده کنید.

الف) $۸b - ۱۰h - ۲ - ۷b + ۵ - ۳h =$

ب) $۲(-۶b-۲t)+۴(-۹b+۵t)=$

ج) $-۷d-۳(۱۰k-۵d)-۱۱k=$

د) $ew(-۷we-۳+۸w)-۱۰=$

درس سوم: مقدار عددی عبارات جبری

همانطور که قبلا گفته شد هر حرف انگلیسی در عبارت جبری نماینده عددی نامعلوم است. اما اگر مقدار آن مشخص شود می توان با قرار دادن آن مقدار، داخل عبارت بجای حروف انگلیسی، مقدار عددی آن عبارت را مشخص کرد.

مثال: مقدار عددی عبارات جبری زیر را به ازای $b=۲$ و $k=۵$ بدست آورید.

$۲(-۴b+۳k)=$

حل: می دانیم $۳k$ یعنی $۳\times k$ و بجای k نیز مقدار داده شده در سوال یعنی ۵ را قرار میدهیم و همینطور $-۴b$ یعنی $-۴\times b$ و بجای b هم مقدار داده شده در سوال یعنی ۲ را قرار می دهیم. سپس به ترتیب اولویت آن را حل میکنیم. یعنی ابتدا داخل پرانتز ضرب ها را از چپ به راست انجام میدهیم و سپس حاصل جمع عبارت داخل پرانتز را محاسبه کرده و پاسخ را در عدد بیرون پرانتز ضرب می کنیم.

$۲(\underline{-۴b}+\underline{۳k})=۲(\underline{-۴\times۲}+\underline{۳\times۵})=۲(\underline{-۸}\ \underline{+۱۵})=۲(+۷)=+۱۴$

تمرین: مقدار عددی عبارات زیر را به ازای $m=۴$ و $t=-۱$ بدست آورید.

$t+m=$

$2tm=$

$4(3t-m)=$

$-3(2m+3t)=$

درس چهارم: معادله

معادله یعنی یک عبارت جبری که دارای علامت مساوی و حروف جبری باشد.

به عبارت $3s+4=19$ توجه کنید. این یک معادله است و در واقع مانند یک معما جوابی دارد. مفهوم این معادله این است که ۳ برابر عددی مانند s بعلاوه ۴ مساوی ۱۹ شده است. شما به راحتی میتوانید این عدد را حدس بزنید..... به نظر شما مقدار s چقدر است؟

آفرین! بله پاسخ عدد ۵ می باشد. تبریک می گوییم شما یک معادله را حل کرده اید!!!

حل یک معادله گاهی اوقات به همین راحتی است. شما میتوانید بعضی معادلات را با روش حدس و آزمایش حل کنید و پاسخ آن را به راحتی بدست آورید. در معادله قبلی شما مقدار s را بدست آوردید.

روش کلی برای حل معادله

دو طرف یک معادله مانند دو کفه ترازو هستند. وقتی دو کفه ترازو با هم برابر باشند، اگر دو جسم هم وزن را دو کفه ترازو قرار دهید، کفه ترازو باز هم برابر می ماند و تغییری نمیکند. از این نکته طلایی می توان نتیجه گرفت:

اگر دو طرف یک معادله را با عددی یکسان جمع کنیم تساوی بر هم نمی خورد.

اگر از دو طرف یک معادله مقداری یکسان کم کنیم تساوی بر هم نمی خورد.

اگر دو طرف یک معادله را در عددی یکسان ضرب کنیم تساوی بر هم نمی خورد.

اگر دو طرف یک معادله را بر عددی یکسان تقسیم کنیم تساوی بر هم نمی خورد.

حال چطور از این نکات برای حل معادله استفاده کنیم؟

معادله قبلی یادتان هست؟ پاسخ شد ۵. حالا با استفاده از نکات فوق آن را حل میکنیم.

برای حل معادله ی ۱۹= ۴+۳S کافیست به طرفی که مجهول (یعنی S) قرار دارد توجه کنید (یعنی سمت چپ این تساوی).

۱- ابتدا اگر جمع و تفریقی کنار مجهول قرار داشت برعکس آن را در دو طرف معادله مینویسیم و دو طرف را ساده میکنیم.

۲- سپس دو طرف را در معکوسِ عدد ضریبی که به مجهول چسبیده است ضرب میکنیم.

پس برای حل ابتدا برعکس ۴+ یعنی ۴- را در دو طرف معادله مینویسیم و ساده میکنیم:

معادله به صورت ۴-۱۹=۴-۴+۳S در می آید که پس از ساده کردن ۱۵=۳S را بدست می آوریم.

سپس طرفین معادله را در معکوس عدد ۳ که ضریب عددی چسبیده به S هست ضرب میکنیم.

$$\frac{۱}{۳} \times ۳s = ۱۵ \times \frac{۱}{۳}$$

که پس از ساده کردن دو طرف، عبارت ۵=s بدست می آید که معنی آن این است که مقدار s برابر ۵ می باشد و همان جوابی است که در ابتدا بدست آورده ایم.

روش دوم حل معادله به روش معلوم و مجهول:

در این روش ابتدا مجهول ها(عبارات جبری) را به طرف چپ تساوی میبریم و معلوم ها (عددها) را به سمت راست تساوی میبریم. توجه داشته باشید که هر عبارتی که از مساوی عبور کند قرینه می شود.

سپس دو طرف معادله را ساده میکنیم و در مرحله آخر قسمت معلوم (عدد) را تقسیم بر ضریب مجهول میکنیم.

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$۵\ m+۲۰ = ۲\ m+۱۴$$

ابتدا مجهول۲ m را به سمت چپ تساوی و عددِ ۲۰+ را به سمت راست تساوی می بریم. هر دو اینها به دلیل عبور از تساوی قرینه می شوند:

$$۵\ m-۲\ m = +۱۴-۲۰$$

عبارت را ساده می کنیم:

$$۳\ m =-۶$$

در مرحله آخر عدد ۶- را بر ضریب یعنی ۳ تقسیم میکنیم. حاصل برابر است با ۲- پس مقدار m برابر ۲- می باشد: $m= -۲$

توصیه می شود همیشه از یکی از این دو روش برای حل معادله استفاده کنید، زیرا برخی پاسخ معادلات را نمی توان با حدس و آزمایش در معادله بدست آورد.

تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲b + ۶ = ۱۸$

ب) $t - ۳ = ۱۰$

ج) $۳k = ۲۱$

د) $۴d + ۱۸ = ۲d - ۱۰$

فصـــل ۴ هندسه و استدلال

هدف کلی

آشنایی دانش آموزان با استدلال و نحوه بیان آن و اندازه گیری و یادآوری مطالب قبلی

انتظارات از دانش آموزان در این درس

۱ پاره خط ها را نام گذاری کند و مقایسه کند

۲ روابط بین پاره خط ها را بشناسد

۳ با تبدیلات هندسی (انتقال، دوران و قرینه) شکل ها را جابجا کند

٤ شکل های هم نهشت را بشناسد و با توجه به تبدیلات، شکل های هم نهشت را رسم کند

روابط بین پاره خطی

عناصر اصلی علم هندسه:

۱-نقطه		۲-خط		۳-زاویه		۴-سطح و حجم

نقطه: جزء مفاهیم تعریف نشده است.در اصطلاح اثر قلم بر روی کاغذ را نقطه می گویند و اندازه ندارد.

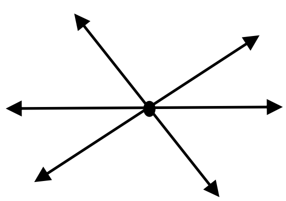
* **خط:** از کنار هم قرار گرفتن بی شمار نقطه، خط ایجاد می شود.

انواع خط:

۱-خط راست		۲-خط شکسته		۳-خط منحنی(خمیده)

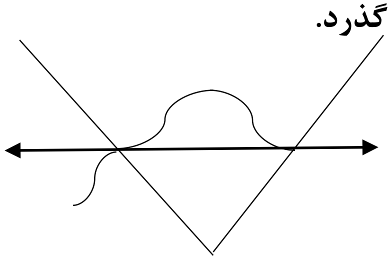
نکته: طبق قرارداد در کتابهای ریاضی منظور اگر خط راست باشد آن را خط می نامیم و انواع دیگر آن را با ذکر نوع خط مشخص می کنیم.

نکته: از یک نقطه بی شمار خط می گذرد.

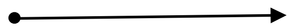


نکته: از دو نقطه فقط یک خط راست (خط) می گذرد.

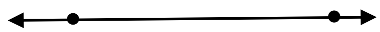
نکته: از دو نقطه بی شمار خط منحنی و بی شمار خط شکسته می گذرد.



* **نیم خط:** قسمتی از یک خط را که از یک طرف با یک نقطه محدود نماییم.یک نیم خط حاصل می شود.

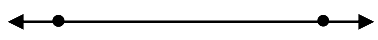


* **پاره خط:** هرگاه بخشی از یک خط را که بین دو نقطه از آن خط می باشد،محدود نماییم پاره خط ایجاد می شود.

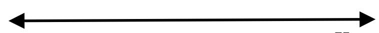


نام گذاری در هندسه و ریاضیات

۱-در ریاضی و هندسه برای نام گذاری از حروف انگلیسی استفاده می کنیم.برای نام گذاری نقطه معمولا از شکل الفبای لاتین (حروف بزرگ) استفاده می کنیم مانندنقطهy A یا نقطه B .

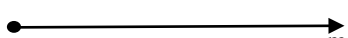


۲-برای نام گذاری خط از دو حرف کوچک استفاده می کنیم مانند خط x y یا y x



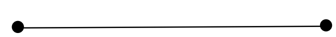
۳-گاهی خط با یک حرف کوچک نام گذاری می شود.

۴-برای نام گذاری نیم خط ابتدا طرف بسته آن را با حروف بزرگ سپس طرف باز آن را با حروف کوچک نام گذاری می کنیم مانند خط Am

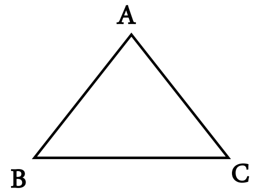


۵-برای نام گذاری پاره خط آن را با دو حرف ابتدا وانتها (حروف بزرگ) می نویسیم.

$\overline{BA}$ یا $\overline{AB}$

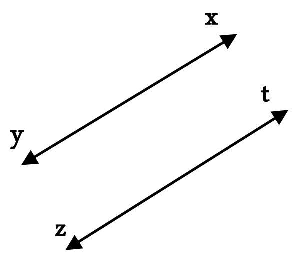


۶-برای نام گذاری مثلث نام سه رأس آن را می نویسیم مثلا مثلث ABC و آن را به صورت $\triangle ABC$ یا $\overset{\triangle}{ABC}$ نشان می دهیم.



۷-درهندسه از علامت ($||$) که نشان دهنده دو خط موازی است برای نشان دادن موازی بودن دو خط استفاده می شود.مثلا برای نوشتن موازی بودن دو خط xy و zt می نویسیم: خط xy موازی خط zt است

$xy || zt$



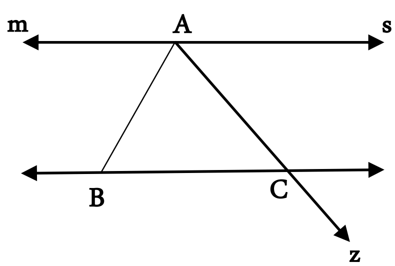
مثال: با توجه به شکل مقابل و به کمک راهبرد الگوسازی پاسخ دهید

الف) تمام پاره خط ها را نام ببرید.

ب) تمام نیم خط ها را نام ببرید.

پ) تمام خط ها را بنویسید.

ت) موازی بودن دو خط را بنویسید.



اندازه گیری طول پاره خط

بین انواع خط فقط پاره خط را می توان اندازه گرفت و برای آن یک عدد به عنوان طول نوشت.

برای نشان دادن طول پاره AB از علامت $\overline{AB}$ استفاده می کنیم.

مثلاً $\overline{AB} = ۲\ cm$ و می خوانیم :طول پاره خط AB برابر با ۲ سانتی متر می باشد.

نکته: اندازه پاره خط AB برابر است با اندازه پاره خط BA یعنی $\overline{AB} = \overline{BA}$

مثال: در شکل مقابل:

الف) پاره خط ها را اندازه بگیرید و طول آن ها را به سانتی متر بنویسید.

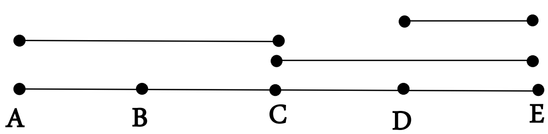
ب) با نوشتن اندازه ها درستی رابطه مقابل را بررسی کنید. $\overline{AM}+\overline{MN}=\overline{AN}$

پ) با توجه به طول پاره خط ها آن ها را با هم مقایسه کنید.

جمع و تفریق پاره خط ها

*** برای جمع دو پاره خط آن ها را به دنبال هم قرار می دهیم و برای تفریق پاره خط ها، آن ها را روی هم قرار می دهیم تا حاصل مشخص شود.**

مثال: **حاصل هریک از تساوی های زیر را بدست آورید.**



$AB + BC = AC$ و $CE - DE = CD$

نکته: **اگر روی یک خط به تعداد n نقطه در نظر بگیریم تعداد پاره خط ها و نیم خط ها از روابط زیر بدست می آید.**

تعداد پاره خط های تشکیل شده از n نقطه $= \frac{n\times(n-۱)}{۲}$

تعداد نیم خط های تشکیل شده از n نقطه $= ۲\times n$

مثال: **روی یک خط ۶ نقطه داریم، چند پاره خط و چند نیم خط می توانیم بنویسیم؟**

تعداد پاره خط ها $= \frac{۶\times(۶-۱)}{۲} = \frac{۶\times۵}{۲} = ۱۵$

تعداد نیم خط ها $= ۲\times۶ = ۱۲$

آشنایی با نحوه استدلال در ریاضی

استدلال به معنی دلیل آوردن برای اثبات درستی یک مطلب می باشد و برای استدلال از مطالب که قبلاً خواندیم استفاده می کنیم و به نتیجه می رسیم.

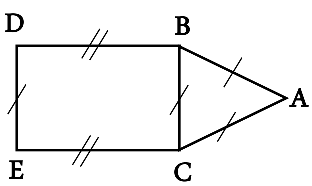
مثال: مسئله زیر را با رابطه های ریاضی بنویسید و نتیجه را به فارسی بیان کنید.ا

o

سن حسین (a) از سن محمد (b) بیشتر است و علی (c) هم سن حسین می باشد. بنابراین سن محمد از سن علی _____ است.

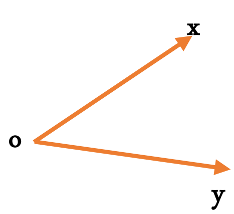
$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ c = a \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\text{علی}}{c} > \overset{\text{محمد}}{b}$$

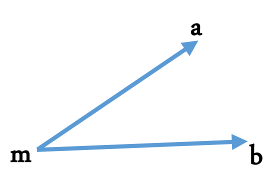
مثال: در شکل مقابل یک مستطیل و یک مثلث متساوی الاضلاع وجود دارد چرا $\overline{BD} > \overline{AB}$ است.



$$\left.\begin{array}{l} \overline{BD} > \overline{BC} \\ \overline{BC} = \overline{AB} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{BD} > \overline{AB}$$

روابط بین زاویه ها: در دوره ابتدایی با شکل زاویه ،اندازه گیری و انواع زاویه (از نظر اندازه) همچنین با زاویه های متمم و مکمل آشنا شده اید.امسال بعد از یادآوری آن ها با روابط بین زاویه ها هم آشنا می شوید که عبارتند از: جمع و تفریق زاویه ها،رابطه های کوچک تری و بزرگ تری بین زاویه ها و نسبت زاویه ها





مقایسه دو زاویه:

با توجه به شکل مقابل زاویه $a\hat{m}b$ از زاویه $x\hat{o}y$ کوچکتر است.

$$x\hat{o}y > a\hat{m}b$$

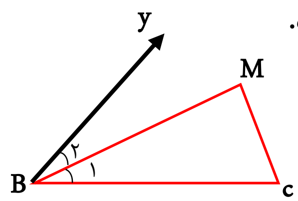
نام گذاری زاویه ها:

۱-با سه حرف $(x\hat{o}y)$ یا $(y\hat{o}x)$ طوریکه رأس وسط بیان شود.

۲-با نام رأس آن $\hat{o}$ یا $\hat{o}_1$

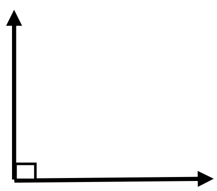
۳-با شماره آن

مثال: در شکل مقابل نام زاویه های خواسته شده را با سه حرف بنویسید.

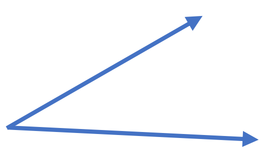


$\hat{B}_۱ =$ $\hat{B}_۲ =$ $\hat{M} =$

انواع زاویه:



الف) زاویه راست (قائمه): هر زاویه که اندازه آن ۹۰ درجه باشد.

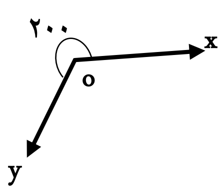


ب) زاویه تند (حاده): هر زاویه که از ۹۰ درجه کوچکتر باشد.

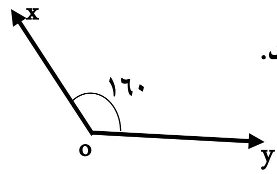
ج) زاویه باز (منفرجه): هر زاویه که از ۹۰ درجه بزرگتر و از ۱۸۰ درجه کوچکتر باشد.

د) زاویه نیم صفحه تخت: هر زاویه که اندازه آن ۱۸۰ درجه باشد.

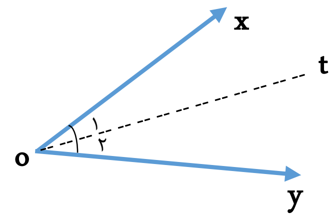
ث) زاویه مقعر (کاو): هر زاویه که اندازه آن بیشتر از ۱۸۰ درجه و کمتر از ۳۶۰ درجه باشد.



ت) **زاویه محدب (کوژ):** هر زاویه که کمتر از ۱۸۰ درجه باشد.

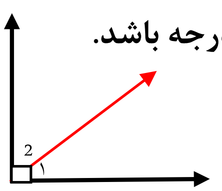


نکته: نیم ساز زاویه: نیم خطی است که از رأس رسم می شود و آن زاویه را به دو زاویه مساوی تقسیم می کند



$\hat{O}_{۱} = \hat{O}_{۲}$

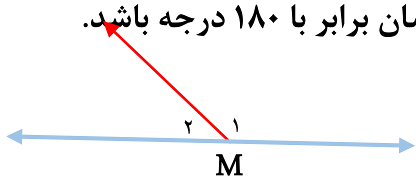
نکته: دو زاویه متمم: دو زاویه را متمم گویند هرگاه مجموعشان برابر با ۹۰ درجه باشد.



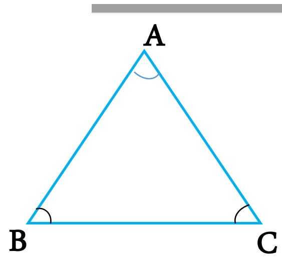
$\hat{M}_{۱} + \hat{M}_{۲} = ۹۰$

نکته: دو زاویه مکمل: دو زاویه را مکمل گویند هرگاه مجموعشان برابر با ۱۸۰ درجه باشد.

$\hat{M}_{۱} + \hat{M}_{۲} = ۱۸۰$



نکته: مجموع زاویه های داخلی مثلث برابر با ۱۸۰ درجه می باشد.



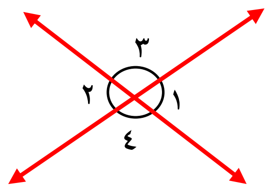
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰$

نکته: در متوازی الاضلاع زاویه های مجاور کنار هم مکمل یکدیگرند.

$\hat{۴}+\hat{۱}=۱۸۰$　　$\hat{۴}+\hat{۳}=۱۸۰$　　$\hat{۳}+\hat{۲}=۱۸۰$　　$\hat{۲}+\hat{۱}=۱۸۰$

دو زاویه متقابل به رأس:

دو زاویه که اضلاع آنها در امتداد یکدیگر و در رأس مشترک باشند را متقابل به رأس می نامیم، زاویه $\hat{۱}$ و $\hat{۲}$ و زاویه $\hat{۳}$ و $\hat{۴}$ متقابل به رأس می باشند.

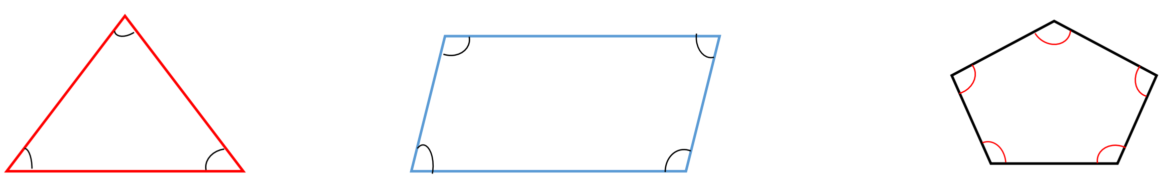


نکته: دو زاویه متقابل به رأس همیشه با هم برابرند.

$\hat{۳}=\hat{۴}$　　$\hat{۱}=\hat{۲}$

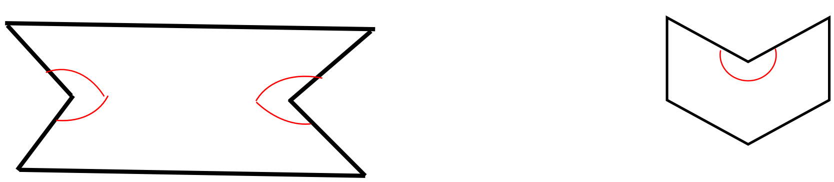
چند ضلعی های محدب:

یک چند ضلعی که هیچ کدام اززاویه های آن بزرگتر از ۱۸۰ نباشد، چند ضلعی محدب یا کوژ نام دارد.



چند ضلعی های مقعر:

یک چند ضلعی که حداقل یک زاویه بزرگتر از ۱۸۰ درجه داشته باشد، چند ضلعی مقعر یا کاو نام دارد.



چند ضلعی های منتظم:

به چند ضلعی محدبی که اندازه تمام زاویه های آن با هم و اندازه تمام ضلع های آن با هم برابر باشند، چند ضلعی منتظم می گوییم

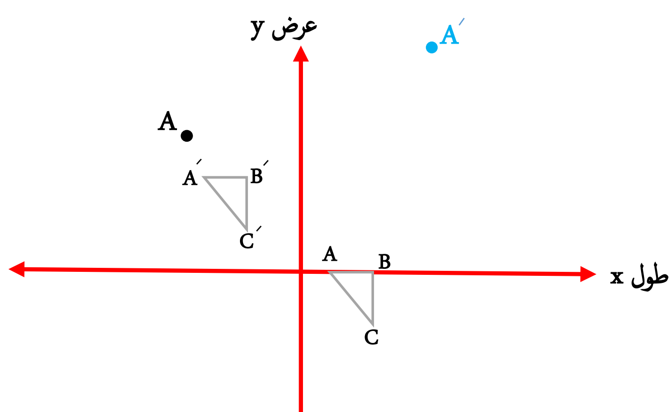
نکته:

در چند ضلعی منتظم هر چه تعداد ضلع ها بیشتر شود اندازه زاویه ها بزرگتر می شود و هرچه تعداد ضلع ها بیشتر شود شکل به دایره نزدیکتر می شود.

تبدیلات هندسی

۱-انتقال:نقطه A' را انتقال یافته نقطه A با مختصات $\begin{bmatrix}+7\\+4\end{bmatrix}$ می گوییم چون مکان نقطه A، ۷ واحد به سمت راست و ۴ واحد به سمت بالا در صفحه مختصات جابجا شده و نقطه A' را ایجاد کرده است.به عبارت دیگر می توان گفت نقطه A تحت انتقال $\begin{bmatrix}+7\\+4\end{bmatrix}$ بر روی نقطه A'تصویر می شود.

۲-مثلث $A'B'C'$ را انتقال یافته مثلث ABC می گوییم چون همه نقاط به یک مختصات جابجا شده اند یعنی همه نقاط ۶ واحد به چپ و ۵ واحد به بالا انتقال پیدا کرده است و در نتیجه هرگاه انتقالی تحت $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ مختصات تمام نقاط شکل تحت یک مختصات انتقال پیدا کنند ۱ شکل انتقال یافته و در انتقال اندازه شکل و جهت شکل حفظ می شود.۲ پس می توان نتیجه گرفت محیط و مساحت آن ها نیز مساوی و برابر است.



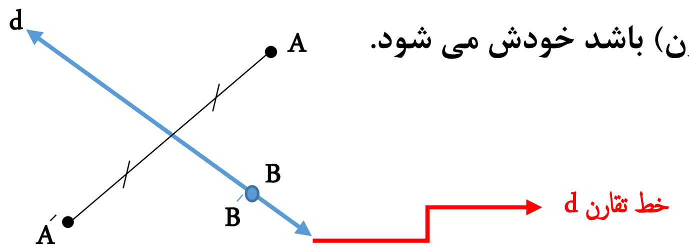
تقارن (بازتاب یا قرینه):

تقارن یا بازتاب به دو صورت است:

۱-تقارن نسبت به یک خط (تقارن محوری)

۲-تقارن نسبت به یک نقطه (تقارن مرکزی)

تقارن محوری تبدیلی است که به وسیله آن تصویر نقطه A(هر نقطه ای که روی خط تقارن نباشد) نسبت به خط d (خط تقارن) نقطه A´ است به طوریکه خط d عمود منصف A A´ می باشد.تصویر هر نقطه مانند B که روی محور تقارن (خط تقارن) باشد خودش می شود.



خط تقارن:

خطی که قرینه کردن (تقارن یا بازتاب) نسبت به آن انجام می شود را **خط تقارن** می گویند.

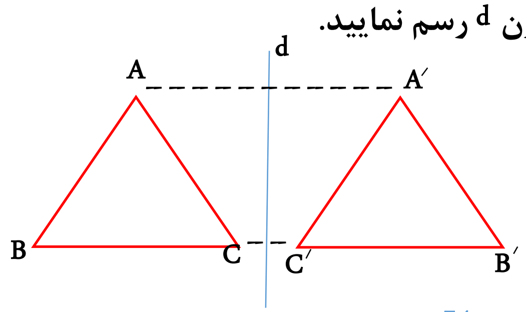
ویژگی های تقارن محوری:

۱-تقارن محوری طول پاره خط و ضلع را حفظ می کند.یعنی اندازه شکل اولیه با اندازه شکل قرینه شده برابر است (پس می توان نتیجه گرفت محیط و مساحت آن ها نیز باهم برابر است)

۲-تقارن جهت شکل را حفظ نمی کند(جهت شکل اولیه و شکل قرینه معمولا با هم متفاوت است)

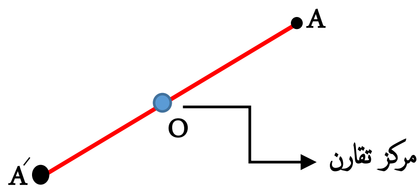
۳-تقارن زاویه بین دو خط را حفظ می کند و ثابت نگه می دارد

مثال: قرینه مثلث A B C را نسبت به محور تقارن d رسم نمایید.

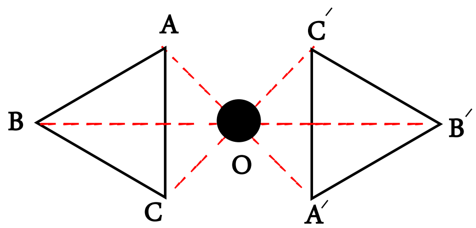


تقارن مرکزی

تقارن مرکزی تبدیلی است که بوسیله آن تصویر نقطه A در صفحه به نقطه ی O (مرکز تقارن) نقطه A' می باشد به طوریکه A' و O و A روی یک خط راست قرار دارد و $\overline{OA} = \overline{OA'}$ است



مثال: شکل ABC را نسبت به نقطه O قرینه کنید.



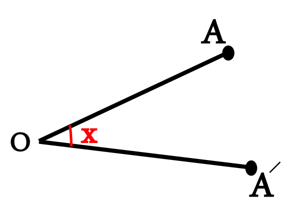
ویژگی های تقارن مرکزی:

۱-طول اضلاع و پاره خط را حفظ می کند پس محیط و مساحت را نیز حفظ می کند یعنی اندازه ی اضلاع شکل اولیه با اندازه اضلاع شکل قرینه شده برابر است

۲-جهت شکل را حفظ نمی کند

۳-زاویه های بین خطوط را حفظ می کند

دوران: دوران به مرکز O و زاویه x تبدیلی است که درآن نقطه ای مثل A را در صفحه به اندازه ی x درجه به نقطه A' در آن صفحه تصویر می کند.



مرکز دوران: یعنی نقطه O ثابت است و برای دوران یک شکل تغییر نمی کند.

اگر A نقطه ای غیر از مرکز دوران O باشد،همیشه $\overline{OA} = \overline{OA'}$ است.

زاویه ای که A و O و A' با هم می سازند با زاویه دوران برابر است $AOA' = x^{\circ}$

نکته: دوران شکل تحت یک زاویه و مرکز دوران مشخص :کافی است که چند نقطه از شکل اولیه (رئوس چند ضلعی) را نسبت به مرکز دوران و با توجه به اندازه و جهت زاویه دوران داده و سپس نقاط جدید را بهم وصل کنیم.

ویژگی های دوران:

۱ طول اضلاع و پاره خط را حفظ می کند یعنی اندازه اضلاع شکل اولیه با اندازه اضلاع شکل دوران یافته برابر است (پس محیط و مساحت را حفظ می کند)

۲ دوران جهت شکل را حفظ نمی کند.

۳ دوران زاویه بین خطوط را حفظ می کند.

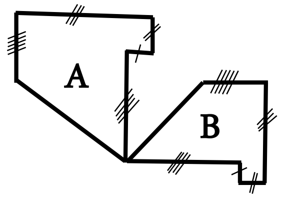
شکل های مساوی:

شکل های هم نهشت: اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل (انتقال، تقارن یادوران) در صفحه بر شکل دیگر منطبق کنیم می گوییم این دو شکل با هم ،هم نهشت یا مساوی هستند.

قرارداد: اگر دو شکل A و B هم نهشت باشند به زبان ریاضی می نویسیم $A \cong B$

$\cong$ نماد هم نهشتی

نکته: در دو شکل هندسی هم نهشت اجزای متناظر (زاویه ها و ضلع ها)دو به دو با هم برابرند تساوی اجزای متناظر (زاویه ها و اضلاع) را هم می توان روی شکل مشخص کرد و هم می توان علامت = تساوی به زبان ریاضی نوشت.



مثال: با توجه به تصویر به سئولات زیر پاسخ دهید.

الف) چرا شکل Aو B هم نهشت هستند

ب)هم نهشتی اشکال A و B را به زبان ریاضی نمایش دهید.

کاربرد تبدیلات هندسی:

۱ انجام تبدیلات متوالی و مختلفی از برخی از چند ضلعی ها،می توان قسمتی و یا کل یک صفحه را پوشاند

۲ از زمان های بسیار دور با استفاده از تبدیلات هندسی در کاشی کاری، آثار زیبایی را ایجاد می کردند

تبدیلات هندسی: انتقال–تقارن–دوران

انتقال: در انتقال فقط جای شکل در صفحه تغییر می کند ،اندازه شکل و جهت آن هیچ تغییری نمی کند

تقارن:　۱ محوری　۲ مرکزی

۱ تقارن محوری: تقارن نسبت به یک خط است که به آن محور تقارن می گوییم

چگونگی انجام تقارن محوری: برای این کار از هر نقطه بر خط تقارن عمود می کنیم و سپس به همان اندازه ادامه می دهیم نقطه بدست آمده قرینه نقطه اولیه است.

۲ تقارن مرکزی: تقارن نسبت به یک نقطه است که به آن نقطه تقارن می گوییم.

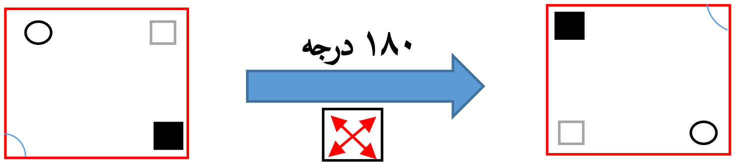
چگونگی انجام تقارن مرکزی: برای این کار از هر نقطه به مرکز تقارن وصل می کنیم و سپس به همان اندازه ادامه می دهیم نقطه بدست آمده قرینه نقطه اولیه است.

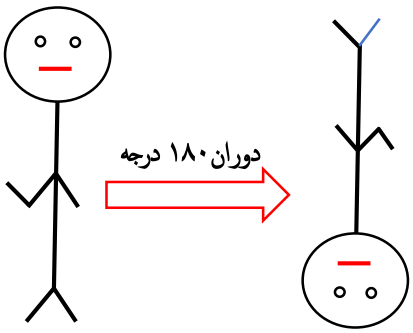
دوران:　۱ دوران ۱۸۰ درجه　۲ دوران ۹۰ درجه

۱ دوران ۱۸۰ درجه: همان تقارن مرکزی است.

نکته: در دوران ۱۸۰ درجه شکل از بالا به پایین و از چپ به راست تغییر وضعیت می دهد.

چرخش فرمان ماشین شبیه این دوران است و حول مرکز می چرخد.


۱۸۰ درجه


دوران ۱۸۰ درجه

فصـــل ۵

شمارنده ها و اعداد اول

هدف کلی:

نوشتن شمارنده های یک عدد،تشخیص اعداد اول و مرکب، پیدا کردن بزرگترین و کوچک ترین شمارنده ی مشترک دو عدد

انتظارات از دانش آموزان در این درس

۱ دانش آموز بتواند مجموعه شمارنده های یک عدد را بنویسد و شمارنده های اول و مرکب را تشخیص دهد.

۲ دانش آموزان به صورت تجربی بیاموزند که اولا برای به دست آوردن شمارنده های یک عدد

می توانند از تقسیم آن عدد بر شمارنده های اول آن استفاده کنند. ثانیا با رسم نمودار شمارنده های یک عدد به نظم و وابستگی شمارنده های یک عدد به یکدیگر پی ببرند.

۳ دانش آموزان به مفهوم مضربی از یک عدد پی ببرند، مجموعه ی مضرب های یک عدد را بشناسند، مضرب مشترک دو عدد را درک کنند و از الگو برای یافتن مضرب مشترک دو عدد استفاده کنند.

شمارنده ها یا مقسوم علیه های یک عدد:

به تساوی زیر دقت کنید:

۱۰ =۲ × ۵ ۱۰ = ۱۰ ×۱

با توجه به این تساوی ها در می یابیم که عدد ۱۰، بر هر یک از اعداد ۱، ۲، ۵ و ۱۰ بخش پذیر است،

بنابراین هر کدام از این اعداد را شمارنده یا مقسوم علیه های عدد ۱۰ می گوییم.

پس شمارنده های یک عدد یعنی اعدادی که عدد مورد نظربر آنها بخش پذیر باشند.

مثال: شمارنده های عدد ۹ و۳۲ و۱۲ را بنویسید.

شمارنده های ۱۲ :۱و ۲ و ۳ و ۴ و۶ و۱۲

شمارنده های ۳۲ : ۱و ۲ و ۴ و ۸ و ۱۶ و ۳۲

شمارنده های ۹ : ۱و ۳ و ۹

نکته:

۱- عدد یک شمارنده ی همه ی اعداد است.

۲- کوچکترین شمارنده ی هر عدد، عدد یک است و بزرگترین شمارنده ی هر عدد، خود آن عدد است.

اعداد اول:

بعضی از اعداد طبیعی فقط ۲ شمارنده دارند:

شمارنده های ۱۱:۱و۱۱ شمارنده های ۷ :۱و ۷ شمارنده های ۳ :۱و۳

به عددهایی مانند ۳و۷ و۱۱که فقط دو شمارنده دارند و آن دو شمارنده عدد ۱ و خود آن عدد است

" عدد اول " می گویند.

* هر عدد طبیعی بزرگتر از یک که فقط بر خودش و یک بخش پذیر باشد، عدد اول است.

* یا هر عدد طبیعی بزرگتر از یک که فقط دو شمارنده دارد، عدد اول است.

نکته:

۱- عدد یک تنها عدد طبیعی است که فقط یک شمارنده دارد وآن هم خود عدد یک است.

۲- هر عدد طبیعی بزرگتر از یک، حداقل دو شمارنده دارد.

۳- کوچکترین عدد اول ۲ است و عدد ۲ تنها عدد زوج اول است و بقیه ی اعداد اول فرد هستند.

اعداد اول به ترتیب عبارتند از:

... و ۲۹ و ۲۳ و ۱۹ و ۱۷ و ۱۳ و ۱۱ و ۷ و ۵ و ۳ و ۲

اعداد مرکب:

اعدادی که بیشتر از ۲ شمارنده داشته باشند را اعداد مرکب می گویند.

اعداد مرکب را می توان به صورت ضرب دو عدد غیر از یک نوشت.

مثلا : ۲× ۷ = ۱۴ یا ۴ ×۳ =۱۲

نکته:

۱- عدد ۱ نه اول است ونه مرکب.

۲- تمام اعداد زوج (غیر از ۲) مرکب هستند.

اعداد طبیعی را می توان به سه دسته تقسیم کرد: عدد۱، اعداد اول و اعداد مرکب

نکته:

۱- مجموع دو عدد فرد، عددی زوج می شود.

مانند ۸ = ۵ + ۳

۲- مجموع دو عدد زوج، عددی **زوج** می شود. مانند ۸ + ۱۲ = ۲۰

۳- مجموع یک عدد فرد و یک عدد زوج، عددی **فرد** می شود. مانند ۹ = ۶ + ۳

۴- حاصل ضرب عدد زوج در عدد فرد، عددی **زوج** می شود. مانند ۳ × ۴ = ۱۲

۵- حاصل ضرب دو عدد فرد، یک عدد **فرد** است. مانند ۵ × ۳ = ۱۵

۶- حاصل ضرب دو عدد زوج، یک عدد **زوج** است. مانند ۶ × ۸ = ۴۸

۷- حاصل ضرب دو عدد اول، عددی اول **نیست.** ۳ × ۷ =۲۱ ۲۱ اول نیست

۸- هر گاه مجموع یا تفاضل دو عدد اول، عددی فرد باشد حتما یکی از اعداد **۲** خواهد بود.

مثال: مجموع دو عدد اول ۷۳ شده است. آن دو عدد کدام اند؟

پاسخ : چون حاصل جمع دو عدد فرد شده است پس یکی از اعداد زوج و دیگری فرد است و چون دو عدد اول هستند و تنها عدد زوج اول ۲ می باشد، پس یکی از اعداد ۲ و دیگری ۷۱ می باشد.

یادآوری قواعد بخش پذیری اعداد:

بخش پذیری بر۲: اعدادی بر ۲ بخش پذیرند که رقم یکان آنها زوج باشد. یعنی یکان آنها **۰و۲و۴و۶ و۸** باشد.

بخش پذیری بر ۳: اعدادی بر ۳ بخش پذیرند که **مجموع رقم های آنها** بر ۳ بخش پذیر باشد.

بخش پذیری بر ۴: اعدادی بر ۴ بخش پذیرند که **دو رقم سمت راست(آخر) آن صفر یا بر ۴** بخش پذیر باشد.

بخش پذیری بر ۵: اعدادی بر ۵ بخش پذیرند که **رقم یکان آنها صفر یا ۵** باشد.

بخش پذیری بر ۶: اعدادی بر ۶ بخش پذیرند که **هم بر ۲ و هم بر ۳** بخش پذیر باشند.

بخش پذیری بر ۷: اعدادی بر ۷ بخش پذیرند که **اگر رقم یکان آنها را ۲ برابر کنیم** و **حاصل را از بقیه ی ارقام کم کنیم**، جواب بر ۷ بخش پذیر باشد.

بخش پذیری بر ۸: اعدادی بر ۸ بخش پذیرند که سه رقم سمت راست آنها صفر یا بر ۸ بخش پذیر باشد.

بخش پذیری بر ۹: اعدادی بر ۹ بخش پذیرند که مجموع رقم های آنها بر ۹ بخش پذیر باشد.

بخش پذیری بر ۱۰: اعدادی بر ۱۰ بخش پذیرند که رقم یکان آنها صفر باشد.

شمارنده های اول یک عدد:

به دو روش می توان شمارنده های اول یک عدد را پیدا کرد.

روش اول: نوشتن شمارنده های آن و سپس پیدا کردن شمارنده های اول

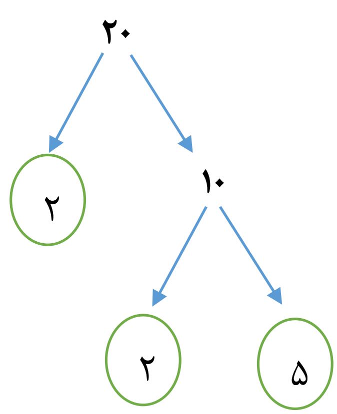
مثال: شمارنده های اول عدد ۲۰ را به دست آورید.

پاسخ:

شمارنده های۲۰ : ۱ و ۲ و ۴ و ۵ و ۱۰ و ۲۰

شمارنده های اول ۲۰ : ۲ و ۵

روش دوم : تجزیه درختی



شمارنده های اول۲۰ : ۲ و ۵

بعد از تجزیه، عدد را می توان به صورت ضرب شمارنده های اول نوشت: $۲۰ = ۲ \times ۲ \times ۵$

❋ از روی تجزیه ی یک عدد و به دست آوردن شمارنده های اول آن می توان بقیه شمارنده های مرکب آن را ساخت

مثال: همه ی شمارنده های ۴۲ را بنویسید.

پاسخ:		۴۲ = ۲ × ۳ × ۷

۱: شمارنده های ۴۲

۱ × ۲ = ۲ و ۱ × ۳ = ۳ و ۱× ۷ = ۷

۱ × ۲ × ۳ = ۶ و ۱ × ۲ × ۷ = ۱۴ و ۱ × ۳ × ۷= ۲۱

۱ × ۲ × ۳ × ۷ = ۴۲

شمارنده های ۴۲ :۱ و ۲ و ۳ و ۶ و ۷ و ۱۴ و ۲۱ و ۴۲

کاربرد شمارنده های اول:

از شمارنده های اول می توان در ساده کردن کسرها استفاده کرد. به مثال های زیر توجه کنید:

$$\frac{۴۸}{۷۲} = \frac{\cancel{۲} \times \cancel{۲} \times \cancel{۲} \times ۲ \times \cancel{۳}}{\cancel{۲} \times \cancel{۲} \times \cancel{۲} \times \cancel{۳} \times ۳} = \frac{۲}{۳} \qquad \frac{۶۸}{۵۱} = \frac{۲ \times ۲ \times \cancel{۱۷}}{۳ \times \cancel{۱۷}} = \frac{۴}{۳}$$

در مثال های بالا، صورت ومخرج هر کسر را به شمارنده های اول تجزیه کرده، سپس شمارنده های اول مشترک را ساده می کنیم.

نکته: اگر صورت و مخرج کسری شمارنده ی مشترک نداشته باشند، آن کسر ساده نشدنی است.

مثال: کدام یک از کسرهای زیر ساده نشدنی است؟

$$\frac{۱۳}{۳۹} = \frac{\cancel{۱۳}}{۳ \times \cancel{۱۳}}$$ ساده شد نی

$$\frac{۴۹}{۲۶} = \frac{۷ \times ۷}{۲ \times ۱۳}$$ ساده نشد نی

❊ به کمک شمارنده های اول می توان اعداد جدیدی تولید کرد. مثلا می خواهیم با شمارنده های اول ۲ و ۳ اعداد طبیعی تولید کنیم.

۲ × ۳ = ۶ و ۲ × ۲ × ۳ = ۱۲ و ۲ × ۲ × ۳ × ۳ = ۳۶

نکته :

۱- تنها شمارنده ی اول یک عدد اول، خود آن عدد است. مثلا شمارنده ی اول عدد ۷، خود ۷ است.

۲- عدد ۱ شمارنده ی اول ندارد.

روش های تعیین بزرگترین شمارنده ی مشترک دو عدد (ب.م.م) :

برای تعیین (ب.م.م) دو عدد ۲ روش را بیان می کنیم:

روش اول: استفاده از شمارنده های دوعدد

روش دوم: استفاده از تجزیه ی درختی

روش اول: استفاده از شمارنده های دوعدد

ابتدا شمارنده های ۲ عدد داده شده را نوشته، سپس شمارنده های مشترک آنها را مشخص می کنیم و در آخر دور بزرگترین شمارنده ی مشترک خط می کشیم. نماد (ب.م.م) علامت ( ) می باشد.

مثال: بزرگترین شمارنده ی مشترک دو عدد ۱۲ و ۱۶ را با استفاده از نوشتن شمارنده ها مشخص کنید.

پاسخ:

۱۶ و ۸ و ۴ و۲ و۱ = ۱۶

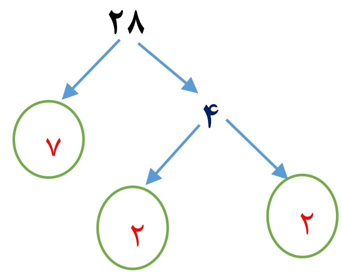
۱۲ و۶ و۴ و۳ و۲ و۱ =۱۲

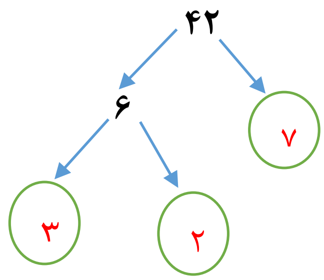
۴ و ۲ و۱: شمارنده های مشترک دو عدد ۱۲و ۱۶

روش دوم: استفاده از تجزیه ی درختی:

برای یافتن (ب.م.م) دو عدد با استفاده از تجزیه ی درختی، پس از تجزیه ی دو عدد به عامل های اول، هر تعداد عدد مشترک در تجزیه ی دو عدد باشد، در هم ضرب می کنیم تا (ب.م.م) حاصل شود.

مثال : (ب. م.م) دو عدد ۲۸ و ۴۲ را با استفاده از تجزیه ی درختی بیابید.





۲۸ = ۲ × ۲ ×۷

۴۲ = ۲ × ۳ × ۷

(۲۸ و ۴۲) = ۲ × ۷ =۱۴

نکته :

۱- ب.م.م دو عدد اول برابر با **یک** می شود. مانند   (۷ و ۳) =۱

۲- ب.م.م هر عدد طبیعی با خودش، **با خود آن عدد** برابر خواهد بود. مانند   (۵و ۵) = ۵

۳- ب.م.م دو عدد طبیعی متوالی برابر با **یک** است.   (۱۵ و ۱۶) = ۱

۴- ب.م.م یک و هر عدد طبیعی دلخواه برابر **یک** است.   (۱ و ۴) =۱

۵- اگر عددی طبیعی بر عدد دیگر **بخش پذیر** باشد، ب.م.م آنها **عدد کوچکتر** خواهد بود. مثلا ۲۴ بر ۶ بخش پذیر است پس :   (۲۴ و ۶) = ۶

مضرب:

* مضرب های صحیح یک عدد از ضرب آن عدد در اعداد صحیح ... و۲+ و۱+ و ۰ و ۱- و ۲- و... به دست می آید.

* مضرب های طبیعی یک عدد که به اختصار مضرب های آن عدد گفته می شود، از ضرب آن عدد در اعداد طبیعی ... و ۳ و ۲ و ۱ به دست می آید.

مثال: مضرب های هر یک از اعداد ۳ و ۷ را بنویسید.

پاسخ:

مضرب های ۳ : ۳ و ۶ و ۹ و ۱۲ و ۱۵ و ...

مضرب های ۷ : ۷ و ۱۴ و ۲۱ و ۲۸ و ۳۵ و ...

مثال: پنجمین مضرب عدد ۱۷ چند است؟

پاسخ: باید عدد ۱۷ را در ۵ ضرب کنیم: ۱۷ × ۵ = ۸۵

مثال: ۷۸ چندمین مضرب عدد ۳ است؟

پاسخ: باید ۷۸ را بر ۳ تقسیم کنیم ۷۸ ÷ ۳ = ۲۶

نکته:

۱- مجموعه مضرب های یک عدد بی پایان است، برای همین از نماد ... استفاده می کنیم.

۲- تعداد شمارنده های یک عدد محدود است.

کوچک ترین مضرب مشترک دو عدد (ک.م.م):

برای به دست آوردن (ک.م.م) دو عدد ۲ روش را بیان می کنیم:

روش اول: نوشتن مضرب ها

برای به دست آوردن کوچک ترین مضرب مشترک دو عدد، ابتدا مضرب های آن دو عدد را می نویسیم و سپس مضرب های مشترک آن ها را مشخص می کنیم و دور کوچک ترین مضرب مشترک آن ها خط

می کشیم. نماد (ک.م.م) علامت [ ] می باشد.

مثال : کوچک ترین مضرب مشترک دو عدد ۱۲ و ۱۸ را با استفاده از روش نوشتن مضارب مشخص کنید.

مضارب ۱۲ : ۱۲ و ۲۴ و ۳۶ و ۴۸ و ۶۰ و ۷۲ و ...

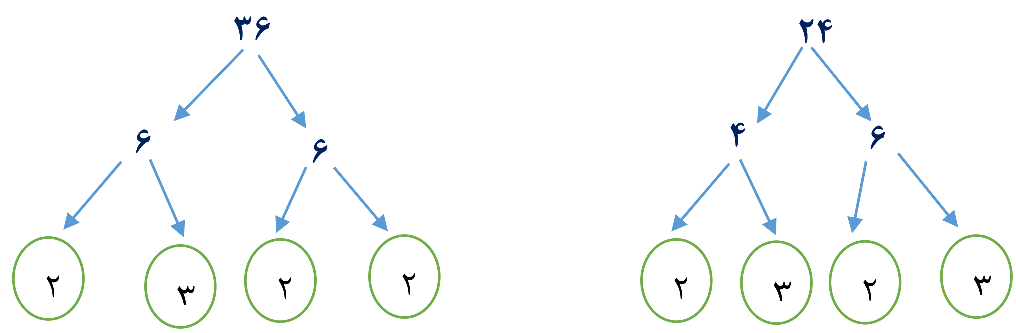
مضارب ۱۸ : ۱۸ و ۳۶ و ۵۴ و ۷۲ و ...

مضارب مشترک دو عدد ۱۸ و ۱۲ : ۳۶ و ۷۲ و ...

روش دوم : با استفاده از تجزیه با عامل های اول

برای محاسبه ی (ک.م.م) دو عدد با استفاده از تجزیه، پس از تجزیه ی دو عدد به عامل های اول، عددهای اول مشترک با بیشترین تکرار را در عددهای اول غیر مشترک ضرب می کنیم.

مثال: ک.م.م دو عدد ۲۴ و ۳۶ را با استفاده از تجزیه درختی به دست آورید؟



۲۴ = ۲ × ۲ × ۲ × ۳　　　　۳۶ = ۲ × ۲ × ۳ × ۳

[۳۶ و ۲۴] = ۲ × ۲ × ۲ × ۳ × ۳ = ۷۲

در **مثال** بالا چون تعداد عامل های ۲ در عدد ۲۴ بیشتر از ۳۶ بود بنابراین برای ک.م.م تعداد عامل های ۲ را از ۲۴ انتخاب کردیم و چون تعداد عامل های ۳ در ۳۶ بیشتر از ۲۴ بود، برای ک.م.م عامل های ۳ را از ۳۶ انتخاب کردیم.

نکته:

۱- ک.م.م دو عدد اول برابر با حاصل ضرب آنها است. مانند   ۲۱ = ۳ × ۷ = [۳ و ۷]

۲- ک.م.م دو عدد متوالی برابر با حاصل ضرب آنها است. مانند   ۴۲ = ۷ × ۶ = [۷ و ۶]

۳- ک.م.م هر عدد با یک مساوی با خود عدد است. مانند   ۲۵ = [۲۵ و ۱]

۴- ک.م.م هر عدد با خودش مساوی خود عدد است. مانند   ۳۸ = [۳۸ و ۳۸]

۵- اگر عددی بر عدد دیگر بخش پذیر باشد، ک.م.م آنها عدد بزرگتر است.

۱۸چون بر ۶ بخش پذیر است.   ۱۸ = [۶ و ۱۸]

۶- ب.م.م دو عدد، شمارنده ی ک.م.م آنها است.

۲ شمارنده ی ۱۲ است. ⟵ ۱۲ = [۶ و ۴] و ۲ = (۶ و ۴)

۷- کوچک ترین مضرب هر عدد طبیعی، خودش است.

مخرج مشترک گرفتن با ک.م.م مخرج ها:

مثال: حاصل عبارت مقابل را به دست آورید

$$\frac{۵}{۱۲}+\frac{۷}{۱۵}=$$

پاسخ: ابتدا ک.م.م دو عدد ۱۲ و ۱۵ را به عنوان مخرج مشترک پیدا می کنیم.

۶۰ = ۵ × ۳ × ۲ × ۲ = [۱۵ و ۱۲]   ۱۵ = ۳ × ۵   ۱۲ = ۲ × ۲ × ۳

$$\frac{۵}{۱۲}+\frac{۷}{۱۵}=\frac{۲۵}{۶۰}+\frac{۲۸}{۶۰}=\frac{۵۳}{۶۰}$$

چکــیده مطــالب

شمارنده ها یا مقسوم علیه های یک عدد:

اعدادی که عدد مورد نظربر آنها بخش پذیر باشد. (یعنی باقیمانده تقسیم صفر شود.)

اعداد اول :

اعدادی که فقط دو شمارنده دارند.(عدد یک و خود عدد)

اعداد مرکب:

اعدادی که بیشتر از دو شمارنده دارند.

روش های تعیین بزگترین شمارنده ی مشترک دو عدد(ب.م.م):

روش اول: استفاده از شمارنده های دو عدد

ابتدا شمارنده های دو عدد داده شده را نوشته، سپس شمارنده های مشترک آنها را مشخص می کنیم و در آخر دور بزرگترین شمارنده ی مشترک خط می کشیم. نماد (ب.م.م) علامت ( ) می باشد.

روش دوم: استفاده از تجزیه ی درختی

برای یافتن (ب.م.م) دو عدد با استفاده از تجزیه ی درختی، پس از تجزیه ی دو عدد به عامل های اول، هر تعداد عدد مشترک در تجزیه ی دو عدد باشد، در هم ضرب می کنیم تا (ب.م.م) حاصل شود.

روش های تعیین کوچک ترین شمارنده ی مشترک دو عدد:

روش اول: نوشتن مضرب ها

برای به دست آوردن کوچک ترین مضرب مشترک دو عدد، ابتدا مضرب های آن دو عدد را می نویسیم و سپس مضرب های مشترک آن ها را مشخص می کنیم و دور کوچک ترین مضرب مشترک آن ها خط می کشیم. نماد (ک.م.م) علامت [ ] می باشد.

روش دوم : با استفاده از تجزیه به عامل های اول

برای محاسبه ی (ک.م.م) دو عدد با استفاده از تجزیه، پس از تجزیه ی دو عدد به عامل های اول، عددهای اول مشترک با بیشترین تکرار را در عددهای اول غیر مشترک ضرب می کنیم.

کاربردهای (ب.م.م) و (ک.م.م) :

از (ب.م.م) برای ساده کردن کسرها و از (ک.م.م) برای هم مخرج کردن کسرها استفاده می شود.

حل تمرین بعضی از مسائل کتاب

۱- در کلاس ۴ گروه ۳ نفره و ۶ گروه ۴ نفره وجود دارد. دانش آموزان این کلاس را در چند حالت می توان به گروه هایی با تعداد مساوی که تعداد نفرات هر گروه بین ۲ و ۷ نفر باشند، تقسیم کرد؟

پاسخ: ۳۶ = ۴ × ۶ + ۳ × ۴ = تعداد کل دانش آموزان کلاس

از آن جا که در گروه ها باید به تعداد مساوی دانش آموز داشته باشیم، باید شمارنده های ۳۶ را که بین ۲ و ۷ هستند بیابیم.

۳۶ و ۱۸ و ۱۲ و ۹ و ۶ و ۴ و ۳ و ۲ و۱ : تمام شمارنده های ۳۶

بین ۲ و۷

بنابراین به ۳ حالت می توان این کار را انجام داد.(۱۲ گروه ۳ نفره، ۹ گروه ۴ نفره، ۶ گروه ۶ نفره)

۲- وقتی می نویسیم ۳ × ۶ = ۱۸، آیا می توان نتیجه گرفت که هم ۳ و هم ۶ شمارنده ی ۱۸ هستند؟ چرا؟

پاسخ:

۶ شمارنده ی ۱۸ است ← ۱۸ را می توان ۶ تا ۶ تا شمرد ← ۳ × ۶ = ۱۸ یعنی ۳ دسته ی ۶ تایی

۳ شمارنده ی ۱۸ است ← ۱۸ را می توان ۳ تا ۳ تا شمرد ← ۶ × ۳ = ۱۸ یعنی ۶ دسته ی ۳ تایی

۳- عدد b پس از تجزیه به صورت مقابل درآمده است. $b = ۴ \times ۳ \times ۱۵ \times ۶$

شمارنده های اول آن چه عددهایی اند؟

پاسخ: توجه کنید که عدد b به صورت کامل تجزیه نشده است.ابتدا باید عددهای ۴ ، ۱۵ و ۶ را تجزیه کنیم.

$$b = \underbrace{۲ \times ۲}_{۴} \times ۳ \times \underbrace{۳ \times ۵}_{۱۵} \times \underbrace{۲ \times ۳}_{۶}$$

بنابراین شمارنده های اول عبارتند از: ۲ و ۳ و ۵

۴- یک جعبه ی دستمال کاغذی به شکل مکعب مستطیل داریم که طول آن ۲۵، عرض آن ۱۲ و ارتفاعش ۵ سانتی متر است. تعیین کنید چند عدد از این جعبه ها در یک کارتن مکعب مستطیل به ابعاد ۵۰، ۲۴ و ۳۰ سانتی متر جا می گیرد؟

پاسخ: ابعاد جعبه ی دستمال کاغذی شمارنده ی ابعاد کارتن می باشند.پس باید ابعاد را طوری در نظر بگیریم که هر بُعد جعبه ی دستمال کاغذی، شمارنده ی یک بُعد از کارتن باشد.

$۲ \times ۱۲ = ۲۴$ ۱۲ شمارنده ی ۲۴ است.

$۶ \times ۵ = ۳۰$ ۵ شمارنده ی ۳۰ است.

$۲ \times ۲۵ = ۵۰$ ۲۵ شمارنده ی ۵۰ است.

$۲ \times ۲ \times ۶ = ۲۴$: تعداد جعبه های دستمال کاغذی

۵- ابتدا صورت و مخرج ها را تجزیه کنید، سپس کسرها را ساده کنید.

$$\frac{۹۶}{۱۴۴} = \frac{\cancel{۲} \times \cancel{۲} \times \cancel{۲} \times \cancel{۲} \times ۲ \times \cancel{۳}}{\cancel{۲} \times \cancel{۲} \times \cancel{۲} \times \cancel{۲} \times ۳ \times \cancel{۳}} = \frac{۲}{۳}$$

$۹۶ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳$ $۱۴۴ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳$

$$\frac{۳۵}{۲۴۵} = \frac{\cancel{۵} \times \cancel{۷}}{\cancel{۵} \times \cancel{۷} \times ۷} = \frac{۱}{۷}$$

$۲۴۵ = ۵ \times ۷ \times ۷$ $۳۵ = ۵ \times ۷$

۶- عدد های زیر تجزیه شده اند، ب.م.م خواسته شده را به دست آورید.

$۳۶ = ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳$ و $۱۲ = ۲ \times ۲ \times ۳$ و $۲۸ = ۲ \times ۲ \times ۷$

(۳ × ۲ × ۲ = ۱۲ و ۷ × ۲ × ۲ = ۲۸)	۴ = ۲ × ۲ = (۱۲ و ۲۸)

(۳ × ۳ × ۲ × ۲ = ۳۶ و ۷ × ۲ × ۲ = ۲۸)	۴ = ۲ × ۲ = (۳۶ و ۲۸)

(۳ × ۳ × ۲ × ۲ = ۳۶ و ۳ × ۲ × ۲ = ۱۲)	۱۲ = ۳ × ۲ × ۲ = (۳۶ و ۱۲)

(۳ × ۳ × ۲ × ۲ = ۳۶ و ۷ × ۲ × ۲ = ۲۸ و ۳ × ۲ × ۲ = ۱۲)	۴ = ۲ × ۲ = (۲۸ و ۳۶ و ۱۲)

۷- به سوال های زیر پاسخ دهید:

اولین مضرب ۷: ۷ = ۷ × ۱	سومین مضرب ۶: ۱۸= ۶ × ۳	دهمین مضرب ۹: ۹۰ = ۹ × ۱۰

۲۴ چندمین مضرب ۶ است؟	۴ = ۶ ÷ ۲۴	۸۰ چندمین مضرب ۸ است؟	۱۰ = ۸ ÷ ۸۰

۳۶ چندمین مضرب ۲ است؟	۱۸ = ۲ ÷ ۳۶	۱۴۴ چندمین مضرب ۶ است؟	۲۴ = ۶ ÷ ۱۴۴

۸- یکی از مهمترین کاربردهای ک.م.م در پیدا کردن مخرج مشترک دو کسر است، یعنی کوچک ترین عددی را پیدا می کنیم که به هر دو مخرج بخش پذیر (قابل قسمت) باشد. مانند نمونه حاصل جمع ها و تفریق ها را با کمک ک.م.م مخرج ها به دست آورید.

$$\frac{۵}{۶}+\frac{۴}{۹}=\frac{۱۵}{۱۸}+\frac{۸}{۱۸}=\frac{۲۳}{۱۸}$$

۶ = ۲ × ۳	۹ = ۳ × ۳	[۹ و ۶] = ۳ × ۳ × ۲ = ۱۸

$$\frac{۷}{۱۵}+\frac{۹}{۲۰}=\frac{۲۸}{۶۰}+\frac{۲۷}{۶۰}=\frac{۵۵}{۶۰}$$

۱۵ = ۳ × ۵	۲۰ = ۲ × ۲ × ۵	[۱۵ و ۲۰] = ۳ × ۲ × ۲ × ۵ = ۶۰

$$\frac{۱۵}{۱۲}-\frac{۷}{۱۸}=\frac{۴۵}{۳۶}-\frac{۱۴}{۳۶}=\frac{۳۱}{۳۶}$$

۱۲= ۲ × ۲ × ۳	۱۸ = ۲ × ۳ × ۳	[۱۲ و ۱۸] = ۲ × ۲ × ۳ × ۳ = ۳۶

۹- یک پیست دو ومیدانی در یک مجتمع فرهنگی ورزشی قرار دارد. امید و فرامرز از یک نقطه شروع به دویدن می کنند. اگر امید هر ۳۵ دقیقه یک دور کامل میدان دو را طی کند و فرامرز هر ۲۱ دقیقه یک دور

کامل طی کند، پس از چند دقیقه فرامرز و امید با هم به همان نقطه ی شروع می رسند؟ در این صورت هر کدام چند دور دویده اند؟

پاسخ: باید ک.م.م دو عدد ۳۵ و ۲۱ را به دست آوریم.

۲۱ = ۳ × ۷ و ۳۵ = ۵ × ۷ ⟶ [۳۵ و ۲۱] = ۳ × ۵ × ۷ = ۱۰۵

یعنی پس از۱۰۵ دقیقه، امید و فرامرز دوباره با هم به نقطه ی شروع می رسند.

تعداد دورهای فرامرز $\frac{۱۰۵}{۲۱} = ۵$

تعداد دورهای امید $\frac{۱۰۵}{۳۵} = ۳$

۱۰-آیا ۲۱۰ مضرب مشترک ۷و ۳۰ است؟چرا؟ بله، زیرا ۲۱۰ حاصل ضرب دو عدد ۷ و ۳۰ است.

آیا ۲۴۰مضرب مشترک ۷ و ۳۰ است؟ چرا؟بله، زیرا ۴۲۰ هم بر ۷ و هم بر ۳۰ قابل قسمت است.

دو عدد ۷و ۳۰ چند مضرب مشترک دارند؟ بی شمار مضرب مشترک دارند.

۱	درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. الف) همه ی اعداد اول فرد هستند. ب) اگر عددی زوج باشد، یکی از شمارنده های اولش ۲ است. ج) اگر دو عدد اول باشند"ب.م.م" آن ها نیز عددی اول است. د) هر عدد اول، بی شمار مضرب اول دارد.
۲	جاهای خالی را با کلمات و یا اعداد مناسب پر کنید. الف) .... شمارنده ی هر عددی است. ب) اعدادی که بیشتر از دو شمارنده داشته باشند را اعداد .... می گویند. ج) کوچک ترین مضرب هر عدد .... است. د) حاصل جمع دو عدد طبیعی فرد، عددی .... است.
۳	کدام یک از اعداد زیر بر ۱۵ بخش پذیر هستند؟ ۴۳۲۰ و ۲۰۰ و۷۳۵ و ۶۳۵
۴	مجموع دو عدد اول ۵۵ است.آن دو عدد کدام اند؟
۵	بین اعداد مقابل، اعداد اول را مشخص کنید. ۱۲۱ و ۶۳ و ۵۳ و ۴۷ و ۴۸ و ۳۲ و ۲۷ و ۲۵ و۲۳
۶	چهار عدد طبیعی بنویسید که فقط اعداد ۲ و ۵ شمارنده ی اول آنها باشند.
۷	عدد a به صورت زیر درآمده است.شمارنده های اول آن را مشخص کنید. $a = ۶ \times ۳۵ \times ۵ \times ۱۱$
۸	با کمک تجزیه ی اعداد صورت و مخرج، کسرهای زیر را ساده کنید. $\frac{۷۲}{۱۰۸} =$　　　$\frac{۳۶}{۴۸} =$
۹	تساوی های زیر را به صورت ذهنی(بدون محاسبه) کامل کنید. [۷ و۵]=　　(۱۲و۱۱) =　　[۱۸ و ۳۶]=　　(۲۸ و ۸۴) =
۱۰	در یک پیست دو ومیدانی، مهبد و فراز از نقطه ی شروع با سرعت ثابت دویدن را آغاز می کنند. اگر مهبد هر ۲۰ دقیقه و فراز هر ۱۶ دقیقه یک دور کامل پیست را طی کنند، پس از چند دقیقه هر دو با هم به نقطه ی شروع می رسند؟

"نمونه سوال تستی"

۱- حاصل جمع بزرگترین و کوچکترین شمارنده ی عدد ۲۹ کدام است؟

الف) ۲۹		ب) ۳۰		ج) ۳۱		د) نمی توان تعیین کرد

۲- اگر $A = ۴ \times ۶ \times ۵$ و $B = ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۷$ باشد، کدام گزینه [B و A] را نشان می دهد؟

الف) ۸۴۰		ب) ۶۰		ج) ۲۴		د) ۱۲

۳- اگر مجموع دو عدد اول ۱۰۳ باشد، مجموع ارقام عدد بزرگتر چند است؟

الف) ۳		ب) ۴		ج) ۲		د) ۵

۴- کوچک ترین شمارنده ی هر عدد و کوچک ترین مضرب هر عدد به ترتیب کدام است؟

الف) صفر ویک		ب) یک ویک		ج) یک و خود عدد		د) خود عدد و یک

۵- علی هر ۶ روز و رضا هر ۸ روز یک بار به باشگاه ورزشی می روند.اگر اولین بار باهم به باشگاه رفته باشند آن ها پس از چند روزدوباره یکدیگر راملاقات می کنند؟

الف) ۴۸		ب) ۱۴		ج) ۲۴		د) ۱۸

۶- عددی اول هستم. اختلافم با عدد اول بعدی ۲ واحد است. اگر یک واحد از من کم شود، حاصل ک.م.م دو عدد ۵ و ۱۴ خواهد شد. من چه عددی هستم؟

الف) ۷۳		ب) ۷۰		ج) ۷۹		د) ۷۱

۷- مجموع دومین، چهارمین و ششمین عدد اول برابر است با:

الف) ۲۲		ب) ۲۳		ج) ۳۲		د) ۲۴

۸- تعداد اعداد کدام عبارت از بقیه بیشتر است؟

الف) اعداد اول زوج		ب) اعداد اول مضرب ۳

ج) شمارنده های اول عدد ۶		د) شمارنده های اول عدد ۸

۹- اختلاف بزرگترین و کوچک ترین عدد اول دورقمی کدام است؟

الف) ۸۹　　　ب) ۸۸　　　ج) ۸۶　　　د) ۸۳

۱۰- کدام یک از اعداد زیر را نمی توان به صورت جمع دو عدد اول نوشت؟

الف) ۱۰　　　ب) ۸　　　ج) ۴۳　　　د) ۱۷

فصـــل ۶
سطـــح و حجـــم

انتظارات از دانش آموزان در این درس

۱ دانش آموزان با حجم های هندسی منشوری و کروی و هرمی آشنا شوند.

۲ انواع حجم ها را از یکدیگر تشخیص دهند و آنها را در اطراف خود کشف کنند.

۳ شناخت چگونگی بدست آوردن حجم اشکال هندسی ونوشتن آن به صورت عبارت جبری .

۴ شناخت مساحت جانبی و کلی وچگونگی بدست آوردن ونوشتن آن

۵ اگر به اطراف خود نگاه کنید همه اشیایی که می بینید حجم دارند ولی همه ی آنها شکل هندسی ندارند.

حجم: مقدار فضایی که هر جسم اشغال می کند حجم آن نامیده می شود.

حجم ها به دو گروه تقسیم می شوند

۱ هندسی

۲ غیر هندسی

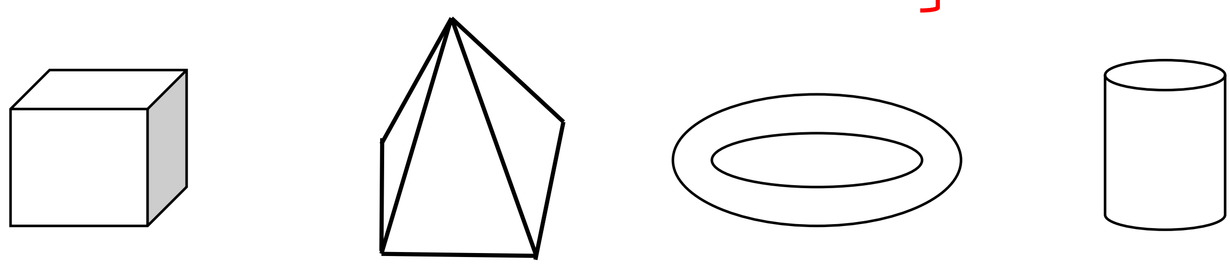
حجم های هندسی : دارای شکل ها و ویژگی های مشخص و تعریف شده هستند و به سه دسته تقسیم می شوند.

حجم های هندسی

۱ منشوری

۲ هرمی یا مخروطی

۳ کروی



منشوری　　کروی　　هرمی　　منشوری

حجم های غیر هندسی: دارای شکل های مشخص و تعریف شده ای نیستند. مثل عروسک و کوله پشتی

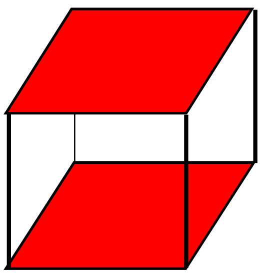
مشخصات حجم های منشوری : دو قاعده مساوی و موازی دارند و بدنه ی آن ها از یک یا چند مستطیل یا متوازی الاضلاع تشکیل شده است .

مشخصات حجم های هرمی : یک قاعده دارند و دور تا دور آن قاعده به رأسی در بالا یا پایین وصل می شود.

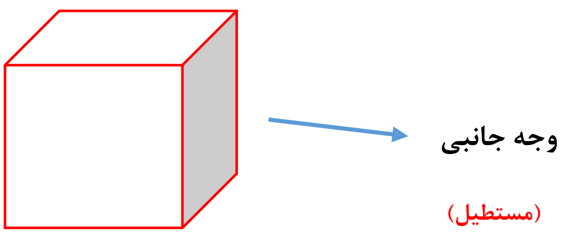
مشخصات حجم های کروی: گرد هستند و زاویه وقاعده هم ندارند و بر اثر دوران یک دایره یا یک نیم دایره حول قطرش حجم های کروی بدست می آیند.

حجم های منشوری بدون هیچ گونه برجستگی یا فرورفتگی بین دو صفحه موازی قرار دارند.

قاعده: دو سطح بالا و پایین یک حجم منشوری را قاعده می گویند.



وجه جانبی: به هر سطح اطراف یک حجم منشوری یک وجه جانبی می گویند.



یال: به محل برخورد هر دو سطح از یک حجم منشوری یال می گویند.

راس: به نقطه برخورد یال ها و قاعده های یک حجم منشوری را راس می گویند .

ارتفاع: فاصله بین دو قاعده را ارتفاع می نامند.

برای اینکه در نام بردن یال و راس چیزی جا نیفتد از راهبرد الگو سازی یا جدول نظام دار استفاده می کنیم .

یک منشور n پهلو دارای n وجه جانبی و $2n$ راس و $3n$ یال است مانند یک منشور ۷ پهلو که ۷ وجه جانبی و ۱۴ راس و ۲۱یال دارد .

نکته: تعداد راس های منشور = تعداد وجه های جانبی × ۲

تعداد یال های منشور= تعداد وجه های جانبی × ۳

مثال: یک منشور۸ پهلو چند راس و یال دارد .

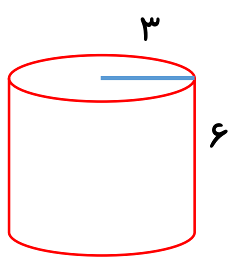
راس: ۱۶ =۲×۸ ⟵ یال: ۲۴=۸×۳ ⟵ ۸ وجه جانبی دارد

رابطه حجم منشوری : برای بدست آوردن حجم منشوری از رابطه ی زیر استفاده می کنیم.

ارتفاع × مساحت قاعده = حجم

h　　s　　v

مثال: حجم استوانه ی زیر را بدست آورید؟



مساحت قاعده: ۲۸/۲۶ = ۳/۱۴ × ۳ × ۳

حجم : ۱۶۹/۵۶ = ۶ × ۲۸/۲۶

در فرمول حجم وقتی می گوییم مساحت قاعده × ارتفاع منظور از مساحت قاعده یعنی مساحت قاعده شکلی که به ما داده شده یعنی اگر شکل استوانه باشد پس قاعده آن دایره است پس ما مساحت دایره را بدست می آوریم اگر شکل ما مکعب مستطیل باشد قاعده شکل ما مستطیل است پس برای مساحت قاعده مساحت مستطیل را بدست می آوریم .

نکته: حجم مکعبی که طول هر یال آن a باشد از رابطه ی $v = a \times a \times a$ بدست می آید.

مثال: حجم مکعبی به طول ۵ سانتی متر چقدر است؟

$v = ۵ \times ۵ \times ۵ = ۱۲۵$ ⟵ سانتی متر مکعب

نکته: اگر ابعاد مکعب مستطیلی به صورت a، b، c باشد حجم آن برابر است با $v = a \times b \times c$

مثال: حجم مکعب مستطیلی را که طول آن ۱۰cm، عرض آن ۸cm و ارتفاع آن ۵cm است بیابید

$V = ۱۰ \times ۸ \times ۵ = ۴۰۰$ سانتی متر مکعب

برای محاسبه حجم یک استوانه به شعاع قاعده r و ارتفاع h از رابطه مقابل استفاده می کنیم.

$$v = \pi \times r \times r \times h$$

مثال: حجم استوانه ای رابیابید که شعاع قاعده آن ۱۰cm و ارتفاع آن ۴cm است.

$$v = \pi \times r \times r \times h \longrightarrow v = ۳/۱۴ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۴ = ۱۲۵۶$$

مساحت جانبی منشور: از جمع مساحت های اطراف مساحت جانبی بدست می آید.

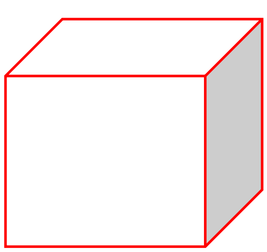
ارتفاع × محیط قاعده = مساحت جانبی

$S_{\text{جانبی}} = P \times h$

نکته ۱: مساحت جانبی یک مکعب همواره از رابطه ($S = ۴ \times S$ یک وجه) یعنی ۴× مساحت یک وجه بدست می آید زیرا وجه های جانبی هر مکعب هم اندازه و مربع شکل می باشند.

نکته ۲ : اگر اندازه هر یال یک مربع a باشد مساحت جانبی آن برابر است با $s = ۴ \times a \times a$

مثال: مساحت جانبی مکعب زیر را بدست آورید؟



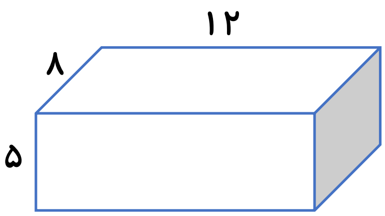
۲۰

$$s = ۴ \times ۲۰ \times ۲۰ = ۱۶۰۰$$

یعنی مساحت یک وجه را بدست آورده و بعد در ۴ ضرب می کنیم چون تعداد وجه های جانبی این شکل ۴ تا می باشد.

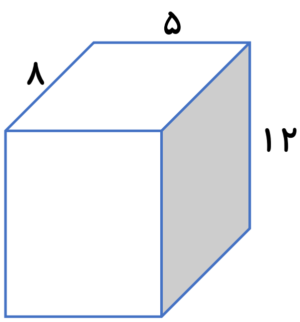
برای بدست آوردن مساحت جانبی یک مکعب مستطیل نمی توان یک رابطه ی کلی ارائه کرد زیرا بسته به این که مکعب مستطیل از چه وجهی روی زمین قرار گرفته است مساحت جانبی آن متفاوت است.

مثال: مکعب مستطیلی به ابعاد ۱۲ و ۸ و ۵ را در دو حالت مقابل قرار داده ایم در هر حالت مساحت جانبی آن را بدست آوریم.



$s = P \times h$

$s = ۲ \times (۱۲ + ۸) \times ۵ \longrightarrow s = ۲۰۰$



$s = P \times h$

$s = ۲ \times (۵ + ۸) \times ۱۲ \longrightarrow s = ۳۱۲$

برای بدست آوردن مساحت جانبی یک استوانه به ارتفاع h وشعاع قاعده r می توان از رابطه مقابل استفاده کرد .

s جانبی $= ۲ \pi r h$

مثال: مساحت جانبی یک استوانه ۳۱۴ سانتی مترمکعب است اگر ارتفاع این استوانه ۱۰ سانتی متر باشد شعاع قاعده این استوانه را بدست آورید . ($\pi = ۳/۱۴$)

s جانبی $= ۲ \pi r h \longrightarrow ۳۱۴$

$۳۱۴ = (۲ \times ۳/۱۴) \times r \times ۱۰ \longrightarrow r = ۵$

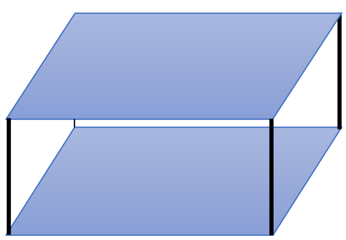
بنابراین برای مساحت جانبی استوانه هم می توان از رابطه ی زیراستفاده کرده (همان رابطه مساحت جانبی منشور ها)

$s = p \times h$

ارتفاع × محیط قاعده = مساحت جانبی

مساحت کل منشور : از جمع مساحت جانبی و مساحت دو قاعده هر شکل مساحت کل منشور بدست می آید.

مثال: برای ساخت مکعب مستطیلی به ابعاد ۳ و۵ و۷ چند سانتی متر مقوا لازم داریم؟



ارتفاع × محیط قاعده = مساحت جانبی

S جانبی = (۷ + ۷ + ۵ + ۵) × ۳ = ۷۲

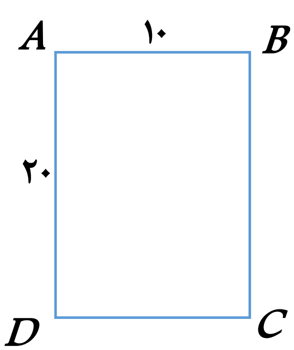
S دو قاعده = ۲ × (۷×۵) =۷۰　　سانتی متر مربع

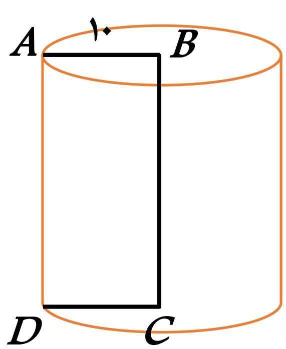
S کل = ۷۲ + ۷۰ = ۱۴۲　سانتی متر مربع

نکته: از دوران مستطیل حول طول یا عرض آن استوانه بدست می آید.

نکته : از دوران مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائمه ی آن مخروط بدست می آید .

از دوران یک سطح مستطیل شکل حول یک ضلع آن یک استوانه ایجاد می شود ضلعی از مستطیل که دوران را حول آن انجام می دهیم ارتفاع و ضلع دیگر مستطیل شعاع قاعده استوانه خواهد بود.

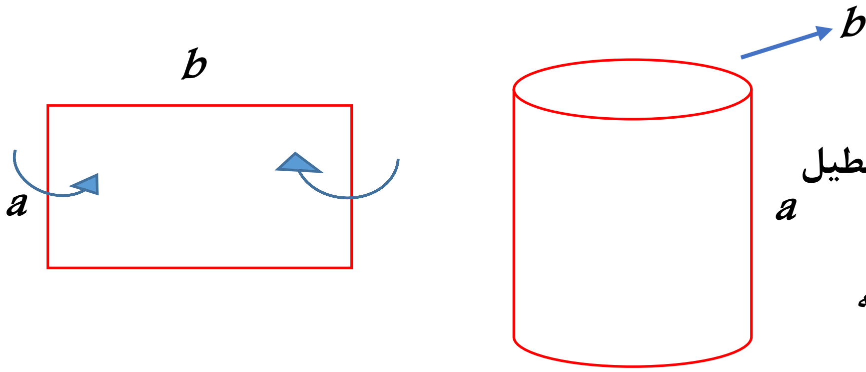




مساحت قاعده = ۱۰ × ۱۰ × ۳/۱۴ = ۳۱۴

حجم = ۳۱۴ × ۲۰ = ۶۲۸۰

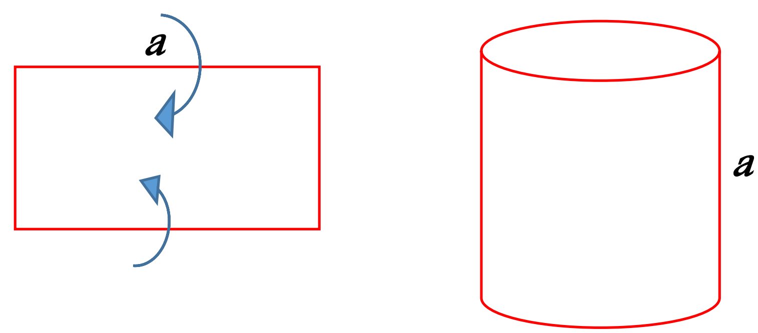
اگرمستطیل را از طول لوله کنیم محیط قاعده استوانه (دایره) برابر با طول مستطیلی است که در گسترده استوانه می بینید و عرض مستطیل همان ارتفاع استوانه است.



عرض × طول = مساحت مستطیل

ارتفاع　　محیط قاعده استوانه

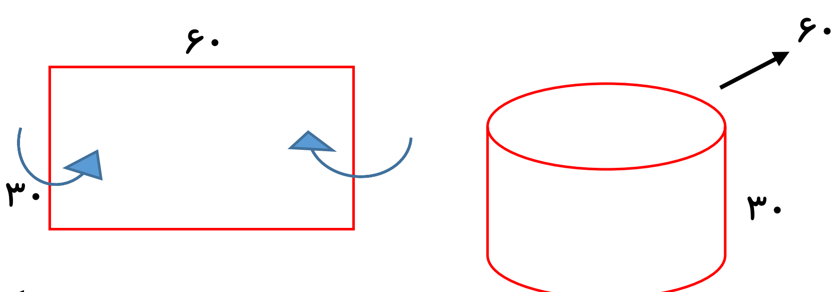
اگرمستطیل را از عرض لوله کنیم محیط قاعده استوانه (دایره) برابر با عرض مستطیلی است که در گسترده استوانه می بینید و طول مستطیل همان ارتفاع استوانه است



عرض × طول = مساحت مستطیل

محیط قاعده استوانه　　ارتفاع

مستطیلی به ابعاد ۶۰ و۳۰ سانتی متر را یک بار از طول آن و بار دیگر از عرض آن لوله کرده ایم حجم شکل حاصل رادر هر دو حالت بدست ۳ آورید. ($\pi = ۳$)



در شکل مقابل ما مستطیل را از طول آن لوله کردیم

$h = ۳۰$

$۲\pi r = ۶۰ \longrightarrow ۲ \times ۳ \times r = ۶۰ \longrightarrow r = ۱۰$ سانتی متر

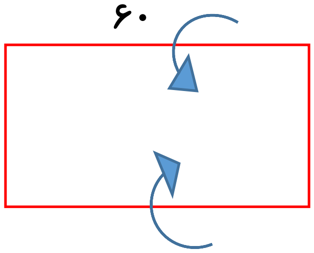
$v = \pi \times r \times r \times h \longrightarrow v = ۳ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۳۰ = ۹۰۰۰$ سانتی متر مکعب

$$\begin{cases} \overset{۶}{\cancel{۲\times ۳}}\times r = ۶۰ \\ r = \frac{۶۰}{۶} = ۱۰ \end{cases} \longrightarrow$$ به دست آوردن شعاع

این بار می خواهیم مستطیل را از عرض آن لوله کنیم و حجم آنرا بدست آوریم

۶۰

۳۰



$h = ۶۰$

عدد π

$۲\pi r = ۳۰ \longrightarrow ۲\times ۳\times r = ۶۰ \longrightarrow r = ۵$ سانتی متر

$v = \pi \times r \times r \times h \longrightarrow v = ۳ \times ۵ \times ۵ \times ۶۰ = ۴۵۰۰$ سانتی متر مکعب

با محاسبه حجم تشکیل شده در هر یک از دو حالت و با اینکه هر دو حجم با یک مستطیل ساخته شده است می بینیم که مقدار دو حجم یکسان نیست.

مقطع زدن

اگر یک منشور را با یک قیچی یا چاقو برش بزنیم و سطح برش خورده را رنگ کرده و روی یک کاغذ بزنیم اثر آن به شکل های هندسی مانند : مربع و مستطیل و بیضی و .... دیده می شود به این کار مقطع زدن می گویند.

اگر یک حجم هندسی را از ابعاد مختلف (روبرو ، بالا ، سمت راست ، پایین) نگاه کنیم شکل های هندسی متفاوتی دیده می شود.

یادآوری

-متر مکعب و سانتی متر مکعب از واحد های حجم هستند.

- هر متر مکعب ۱۰۰۰ لیتر است.

- هر لیتر ۱۰۰۰ سی سی است .

- هر متر مکعب ۱۰۰۰۰۰۰ سانتی متر مکعب است.

-سی سی همان سانتی متر مکعب است.

تمرینات

تمرین **۱** عبارات درست را با نماد ✓ و نادرست را با × مشخص کنید .

. الف) یک منشور ۷پهلو دارای ۱۴یال است

ب) تمام وجه های یک مکعب به صورت مربع است .

پ) اگر یک مستطیل را حول عرض آن دوران دهیم مکعب مستطیل ساخته می شود.

. ت) حجم مکعب به ضلع ۲ سانتی متربرابر۸ سانتی متر مکعب است

تمرین **۲** در جای خالی عدد یا کلمه مناسب بنویسید. در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف) یک منشور ۹پهلو دارای ....راس و .... یال می باشد

ب) اگر منشوری دارای ۲۴رأس باشد دارای .... یال است.

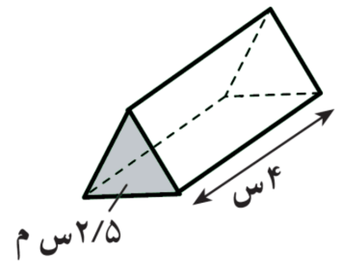
پ) حجم هر منشور برابر با ....ضربدر .... است.

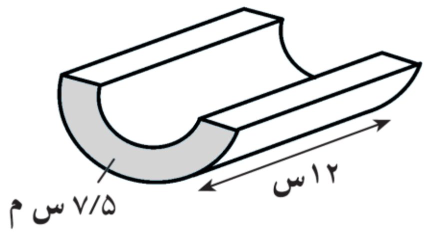
ت) مساحت جانبی هر منشور برابر با .... ضربدر .... است

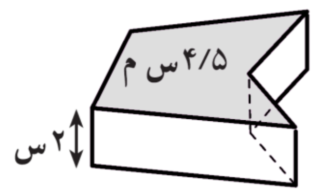
ج) ازدوران یک مستطیل حول یکی از ضلع ها ....پدید می آید .

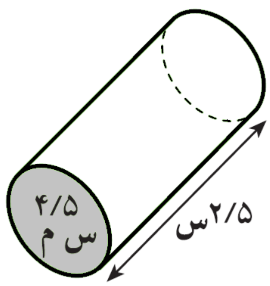
د) منشور چهار پهلو دارای .... یال است .

تمرین ۳ با توجه به ارتفاع و مساحت قاعده ی داده شده، حجم هر شکل را محاسبه کنید.

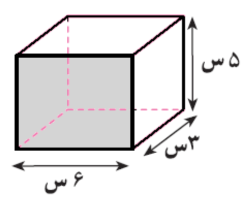


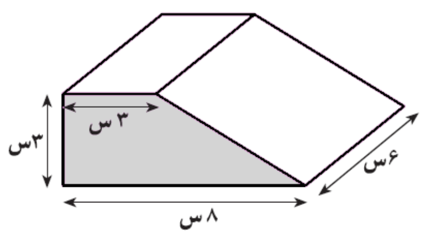






تمرین ۴ ابتدا مساحت قاعده و سپس حجم هر یک از اجسام زیر را حساب کنید.

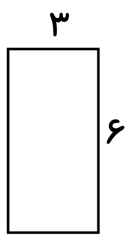




تمرین ۵ یک پارچ به شکل استوانه است که ارتفاع آن ۳۰ سانتی متر و شعاع قاعده ی آن ۸ سانتی متر است . آب داخل این پارچ را در لیوان هایی به شکل استوانه که ارتفاع آنها ۱۰ سانتی متر و شعاع قاعده ی آن ۴ سانتی متراست، می ریزیم . این آب چند لیوان را پر می کند ؟

تمرین ۶ می خواهیم جعبه ای به شکل مکعب مستطیل به ابعاد ۱۰ و ۲۰ و ۱۵ سانتی متر را با کاغذ کادو بپوشانیم برای کادو کردن این جعبه چه مقدار کاغذ کادو احتیاج داریم ؟

تمرین ۷ مستطیل شکل زیر را حول طول آن دوران می دهیم حجم حاصل از دوران را حساب کنید؟



تمرین ۸ حجم، مساحت جانبی و مساحت کل منشور ۴ پهلو با قاعده ی مربع به ضلع ۲سانتی متر و ارتفاع ۱۳سانتی متر را بدست آورید؟

فصــل ۷
تــوان و جــذر

هدف کلی

مطالعه مفاهیم توان و جذر و محاسبات مربوط به آن ها

انتظارات از دانش آموزان در این درس

۱ آشنایی با مفهوم عدد توان دار و محاسبه ی عدد توان دار

۲ انجام ضرب و تقسیم اعداد توان دار

۳ بررسی معادلات توانی

٤ آشنایی با مفهوم جذر و ریشه و محاسبات مربوط به آن

٥ آشنایی با مفهوم مجذور و مکعب

فصل هفتم :

تـوان

جــذر

بخش اول: مفهوم عدد توان دار

مفهوم عدد توان دار به تکرار جمع ضرب و به تکرار ضرب توان می گوییم.

$۳+۳+۳+۳ = ۳ \times ۴ \rightarrow$ تعداد

$۵ \times ۵ \times ۵ = \underset{\text{پایه}}{۵}^{\overset{\text{توان}}{۳}} \longrightarrow$ خوانده می شود ۵ به توان ۳

$$\boxed{۵^{۳} \neq ۵ \times ۳}$$

بخش دوم: ضرب و تقسیم اعداد توان دار

برای ساده کردن عبارات توانی چند قانون وجود دارد:

۱) ضرب اعداد توان دار

الف) اگر دو عدد توان دار با پایه های یکسان درهم ضرب شوند یکی از پایه ها را نوشته و توان هارا جمع می کنیم.

مثال : $۴^{۳} \times ۴^{۱۲} = ۴^{۱۵}$

$$x^m \times x^n \longrightarrow x^{m+n}$$

ب) اگر دو عدد توان دار در هم ضرب شوند که توان ها مساوی باشند یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

$$(۱۰)^{۷} \times (۰/۵)^{۷} = (۵/۰)^{۷} = ۵^{۷}$$

نکته ۱: گاهی ظاهراً پایه ها برابر نیستند اما با کمی ساده کردن برابر می شوند مانند:

$$۲/۵ = \frac{۵}{۲} = ۲\frac{۱}{۲}$$

یا در مثالی دیگر

$$(۱/۲)^{۲} \times (۱/۲)^{۳} \times (\frac{۶}{۵})^{۷} \times (۱\frac{۲}{۱۰})^{۵} = (۱/۲)^{۲+۳+۷+۵} = (۱/۲)^{۱۷}$$

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۶}{۵} = ۱\frac{۲}{۱۰}$$

نکته ۲: هرگاه عدد توان داری داخل پرانتز باشد و بیرون پرانتز مجدداً یک توان قرار داده شود پایه را نوشته و توان ها را در هم ضرب می کنیم.

قاعده توان در توان: $((a^m)^n)^p = a^{m.n.p}$

قاعده توان منفی: $\frac{1}{a^{-1}} = a^1$ $\quad (\frac{a}{b})^{-m} = (\frac{b}{a})^m$

۲) قاعده تقسیم اعداد توان دار

هر گاه دو عدد توان دار برهم تقسیم شوند به طوری که:

الف) پایه ها یکسان باشد کافی است:

یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از هم کم کنیم.

$$x^m \div x^n = x^{m-n}$$

$$(۰/۵)^۴ \div (۰/۵)^۲ = (۰/۵)^۲$$

ب) هرگاه توان ها یکسان باشند یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را برهم تقسیم می کنیم.

$$x^n \div y^n = (\frac{x}{y})^n$$

مثال:

$$۷^۳ \div ۴^۳ = (\frac{۷}{۴})^۳$$

نکته: هر عدد یا عبارتی که توان ندارد توان آن یک است.

$$۳^۵ \div ۸۱ \rightarrow ۳^۵ \div ۳^۴ = ۳^۱$$ **یا ۳**

چند نکته درباره اعداد توان دار:

نکته ۱: هر عددی به توان یک برسد برابر است با خود عدد

$(-۱۰۰۰)^۱ = -۱۰۰۰$ مثال $۱۰^۱ = ۱۰$ $\rightarrow$ $x^1 = x$

نکته۲: یک به هر توانی برسد حاصل برابر یک است با عددیک

$۱^{۱۰۰۰} = ۱$ $۱^{۱۰} = ۱$ $۱^x = ۱$

نکته۳: هر عبارت یا عددی(غیر از صفر) به توان صفر برسد حاصل برابر یک است.

$(-۱۰۰)^۰ = ۱$ $۱۰۰^۰ = ۱$ $x^0 = ۱\ (x \neq 0)$

نکته ۴

- **عدد مثبت = زوج(عدد منفی)**
- **عدد منفی = فرد(عدد منفی)**
- **مجذور یا مربع = ۲(عدد)**

نکته۵: حال یک عدد کسری را مثال می زنیم:

اگر عدد داخل پرانتز باشد صورت و مخرج به تعداد توان ضرب می شوند اما اگر عدد کسری داخل پرانتز نباشد عددی به توان می رسد که توان بالای آن قرار گیرد.

$$(\frac{۳}{۲})^{۲} \rightarrow \frac{۳}{۲} \times \frac{۳}{۲} = \frac{۹}{۴}$$

$$\rightarrow (\frac{۳}{۲})^{۲} \neq \frac{۳^{۲}}{۲}$$

$$\frac{۳^{۲}}{۲} \rightarrow \frac{۳ \times ۳}{۲} = \frac{۹}{۲}$$

به نظر شما وجود پرانتز در عبارات توانی اهمیت دارد؟

آیا $(-a)^n = -a^n$

پاسخ: اگر n توان زوج باشد تساوی نمی تواند برقرار باشد. •

$$(-۸)^{۲} \neq -۸^{۲} \quad \rightarrow \quad +۶۴ \neq -۶۴$$

اما اگر n توان فرد باشد تساوی می تواند برقرار باشد.

$$(-۲)^{۳} = -۲^{۳} \quad \rightarrow \quad -۸ = -۸$$

برخی از کاربردهای توان در تجزیه:

الف) تعیین (ب م م) و [ک م م]

$[۵۶و۷۷]=۲^{۳}\times۷\times۱۱=۶۱۶$

۵۶=۲۳×۷　　　۷۷=۷×۱۱　　　(۵۶و۷۷)=۷

ب) تعیین تعداد شمارنده های یک عدد

$۱۴۰۰=۲^{۳}\times۵^{۲}\times۷$

$(۱+۳)(۱+۲)(۱+۱)=۲۴$

نکته: در جمع و تفریق اعداد توان‌دار هیچ قاعده خاصی مانند ضرب و تقسیم وجود ندارد یعنی هرعدد جداگانه به توان می رسد و سپس حاصل نهایی را به دست می آوریم.

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید؟

الف) $۵^{۳}-۴^{۲}+۸^{۰}=۱۲۵-۱۶+۱=۱۱۰$

ب) $(۲^{۷}+۳)^{۰}\times۲^{۵}+۲^{۵}-۳^{۲}$

$۱\times۲^{۵}+۲^{۵}-۳^{۲}\longrightarrow ۳۲+۳۲-۹=۶۴-۹$

ترتیب اولویت:

۱ ابتدا داخل پرانتز یا کروشه (داخلی ترین)

۲ توان و جذر

۳ ضرب و تقسیم (از چپ به راست)

۴ جمع و تفریق (از چپ به راست)

مثال) حاصل عبارات زیر را بیابید:

الف) $\frac{۱۲۱ \div ۱۱ - (۴ \times ۳)^0}{۵ \times (۱۴ - ۲^۲)} \rightarrow \frac{۱۱ - ۱}{۵ \times (۱۴ - ۴)} = \frac{۱۰}{۵۰} = \frac{۱}{۵}$

ب) $(۱۵\times۳)^۰ - ۵ \times ۲^۳ - (۹ \div ۳) \times ۳^۲ = ۱ - ۵ \times ۸ - (۳) \times ۹ \longrightarrow ۱ - ۴۰ - ۲۷ = -۶۶$

محاسبه عبارات توان دار:

به جای حروف اعداد داده شده را جایگزین می کنیم.

مثال) حاصل عبارات زیر را به ازای مقادیر داده شده حساب کنید:

الف) $a^2+b^2-ab \quad (a=-۳ , b=۱)$

پاسخ) $(-۳)^۲+(۱)^۲-(-۳)(۱) \longrightarrow ۹+۱+۳=۱۳$

ب) $\frac{a^2+2ab}{a^2-b^2} \longrightarrow (a=-۲ , b=-۳)$

پاسخ) $\frac{(-۲)^۲+۲(-۲)(-۳)}{(-۲)^۲-(-۳)^۲} = \frac{۴+۱۲}{۴-۹} = \frac{۱۶}{-۵} = -\frac{۱۶}{۵}$

بخش سوم: معـــادلات تـــوانی

۱ پایه های برابر با توان های متفاوت: در این حالت چون پایه ها در دو طرف مساویند توان ها را نیز مساوی قرار می دهیم.

$a^m = a^n \rightarrow m = n$

مثال: مقدار x ها را در معادله بیابید:

$۳۶^{۲x-۱}=۶^{۴}$　　　$۳۶=۶^{۲}$

$\longrightarrow (۶^{۲})^{۲x-۱}=۶^{۴} \longrightarrow ۶^{۴x-۲}=۶^{۴}$

$\longrightarrow ۴x-۲=۴ \longrightarrow ۴x=۶ \longrightarrow x=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$

۲ پایه های متفاوت با توان های برابر:

چون توان ها برابرند بنابراین پایه ها نیز برابرند.

$$m^{a}=n^{a} \rightarrow m=n$$

مثال: معادله $x^{۱۷}=۶^{۱۷}$ را حل کنید.

$۶^{۱۷}=x^{۱۷} \Longrightarrow \boxed{x=۶}$

۳ پایه های متفاوت با توان های متفاوت:

هرگاه در دو طرف تساوی توان ها برابر نباشند و پایه ها هم قابل تجزیه و تبدیل به هم نباشند می توان هر یک را مساوی صفر قرار داد و مجهول را به دست آورید.

مثال: در معادله مقابل مقدار y،a را بیابید.

$$۷^{x-۱}=۳^{y+۲} \begin{cases} x-۱=0 \rightarrow x=۱ \\ y+۲=0 \rightarrow y=-۲ \end{cases}$$

رقم یکان اعداد توان دار

۱ هرگاه رقم یکان عددی یکی از ارقام ۰ و ۱ و ۵ و ۶ باشد به هر توانی برسد رقم یکان آن تغییری نمی کند.

الف) $۶۸۶^{۴۸}$ ⟵ رقم یکان ۶

ب) $۱۲۳۴۵^{۵۵}$ ⟵ رقم یکان ۵

۲ اگر رقم یکان عددی ۴ باشد به توان فرد برسد رقم یکان آن تغییر نخواهد کرد اما اگر به توان زوج برسد رقم یکان آن ۶ خواهد شد.

الف) $۹۱۰۸۴^{۳۹}$ ⟵ چون به توان فرد رسیده رقم یکان ۴

ب) $۴^{۶}$ ⟵ چون به توان زوج رسیده رقم یکان ۶

۳ عدد ۹ هرگاه به توان زوج برسد یکان آن ۱ و هرگاه به توان فرد برسد یکان آن ۹ می شود.

$۹^{۶}$ ⟵ ۱

$۹^{۵}$ ⟵ ۹

مثال: رقم یکان عبارت $۱۴۹^{۱۰} + ۳۱^{۱۳} + ۲۵^{۱۷}$ را بیابید.

$۲۵^{۱۷}$ ⟵ رقم یکان ⟵ ۵

$۳۱^{۱۳}$ ⟵ رقم یکان ⟵ ۱

$۱۴۹^{۱۰}$ ⟵ رقم یکان ⟵ ۱ ⟵ چون ۱۰ توانی زوج است

رقم یکان = ۷=۱+۱+۵

چند مثال برای یادگیری بهتر مطالب

مثال ۱: اگر $۲^{۱۰}=۱۰۲۴$ باشد حاصل $۲^{۱۴}$ را بیابید:

پاسخ) $۲^{۱۰} \times ۲^{۴} = ۱۰۲۴ \times ۱۶ = ۱۶۳۸۴$

مثال ۲: اگر $۲^{x} = ۱۰$ باشد حاصل $۲^{x+۳}$ و $۴^{x-۱}$ را بیابید.

$۲^{x+۳} \longrightarrow ۲^{x} \times ۲^{۳} \rightarrow ۱۰ \times ۸ = ۸۰$

$۴^{x-۱} \longrightarrow ۴^{x} \div ۴^{۱} \rightarrow (۲^{x})^{۲} \div ۴^{۱} = ۱۰^{۲} \div ۴ = ۱۰۰ \div ۴ = ۲۵$

مثال ۳: ثلث عدد $۲۷^{۴n-۲}$ را بیابید.

$$\frac{۱}{۳} \times ۲۷^{۴n-۲} \qquad \frac{۲۷^{۴n-۲}}{۳} \rightarrow \frac{(۳^{۳})^{۴n-۲}}{۳^{۱}} \rightarrow \frac{۳^{۱۲n-۶}}{۳^{۱}} \rightarrow ۳^{۱۲n-۶-۱} = ۳^{۱۲n-۷}$$

نکته: خط کسری همان تقسیم است.

مثال ۴: حاصل عبارت مقابل را بدست آورید.

$$\frac{-۳^{۲} + ۱^{۸} - ۲^{۲}}{۶^{۲} \div ۲^{۲}} = \frac{-۹ + ۱ - ۴}{۳۶ \div ۴} = -\frac{۱۲}{۹} = -\frac{۴}{۳}$$

مثال ۵: حاصل عبارات زیر را به صورت عددی تواندار بنویسید.

الف) $۳۲^{۲} \times ۱۶^{۳} \times ۲^{۵} \times ۴^{۷}$

ب) $(\frac{۲}{۳})^{۵} \times (\frac{۴}{۹})^{۳} \times (\frac{۴}{۶})^{۷}$

ج) $۱۶^{-۲} \div \frac{۱}{۸۴}$

د) $(۷ \times ۲۷ + ۲ \times ۹^{۶}) \times ۵^{۷}$

بخش چهارم: جذر و ریشه

جذر و ریشه

علی و محمد باغ گلی دارند به شکل مربع و به مساحت ۱۶ مترمربع که می خواهند دور تا دور آن را نرده کشی کنند به نظر شما بدون استفاده از متر چطور باید تشخیص دهند که چند متر نرده احتیاج دارند؟

❈علی فکری به نظرش می رسد او می گوید می دانیم که **مساحت مربع مساوی حاصلضرب یک ضلع در خودش است** یعنی اگر ضلع مربع را a در نظر بگیریم:

مساحت $=a\times a=a^{2}$

یعنی با داشتن مساحت مربع کافی است فقط بدانیم چه عددی در خودش ضرب شده و مساحت حاصل به دست آمده و بعد با خوشحالی به محمد گفت می دانم هر ضلع به ۴ متر نرده احتیاج دارد به نظر شما آیا جواب علی درست است؟

❈**بله، درست حدس زده است چون ۴×۴ =۱۶ = مساحت مربع**

مثال: دیگری در صفحه ۹۳ کتاب درسی شما آمده بچه های عزیز دقت کنید:

❈مساحت یک زمین بازی کودکان که به شکل مربع است برابر با ۱۴۴ مترمربع است طول ضلع این مربع چند متر است؟

پس هر ضلع ۱۲ متر است ۱۲× ۱۲=۱۴۴ = مساحت زمین (پاسخ

با توجه به مطالب فوق جدول زیر را کامل کنید:

ضلع مربع	۳	۸	۱	۳۰	
مساحت مربع	۹				

$۳۰^{۲}=۹۰۰$ و $۱^{۲}=۱$ و $۸^{۲}=۶۴$

یادآوری: در بخش توان خواندیم که در تساوی $۳^{۲}=۹$ عدد ۹ را توان دوم یا مجذور عدد ۳ می نامیم.

توان دوم یا مجذور مثلاً ۵ برابر ۲۵ است همچنین توان دوم(۵−) نیز ۲۵ می باشد.

خوب برای راحتی کار و زیبایی جمله از عبارت $\sqrt{}$ استفاده می شود که به آن رادیکال گفته می شود و مجذور(توان دوم) یک عدد زیر رادیکال قرار می گیرد به طول مثال $\sqrt{۳۶}$ که خوانده می شود رادیکال ۳۶ حال می گوییم چه عددی دوبار در خودش ضرب شود تا حاصل ۳۶ به دست آید.

$\sqrt{۳۶} \rightarrow ۶\times۶ \rightarrow$ جذر

$\sqrt{۳۶} \rightarrow (-۶)\times(-۶) \rightarrow$ جذر

پس نتیجه می گیریم هر عدد مثبت دارای دو ۲ ریشه دوم است که یکی قرینه دیگری است.

نکته: اعداد منفی ریشه دوم ندارند چون هیچ عددی را نمی توان یافت که در خودش ضرب شود و حاصل عددی منفی شود.

-آیا عدد (۴۹-) ریشه دوم دارد؟

پاسخ: خیر، زیرا هیچ عددی در دنیا وجود ندارد که به توان ۲ برسد و حاصل آن منفی شود.

تعریف جذر:

عمل جذر، عکس مجذور می باشد که به آن ریشه دوم گفته می شود.

دو نوع جذر داریم:

- **جذر های دقیق یا کامل**
- **جذرهای تقریبی**

که ابتدا در مورد جذرهای دقیق بحث می کنیم.

جذرهای دقیق: هر عدد طبیعی که دارای جذر دقیق هستند یا به عبارتی جذر آنها یک عدد صحیح است را مجذور کامل می گوییم.

نکته: جذر اعداد یک و صفر برابر خود عدد است.

$\sqrt{۹}=\sqrt{۳^۲}=۳$　　$\sqrt{۱۰۰}=۱۰$　　$\sqrt{۴}=۲$　　$\sqrt{۱}=۱$　　$\sqrt{0}=0$

$\sqrt{۶۴}=۸$　　$\sqrt{۴۹}=۷$　　$\sqrt{۳۶}=۶$　　$\sqrt{۲۵}=۵$　　$\sqrt{۱۶}=۴$

$\sqrt{۱۶۹}=۱۳$　　$\sqrt{۱۴۴}=۱۲$　　$\sqrt{۱۲۱}=۱۱$　　$\sqrt{۱۰۰}=۱۰$　　$\sqrt{۸۱}=۹$

$\sqrt{۱۹۶} = ۱۴$ $\sqrt{۲۲۵} = ۱۵$ $\sqrt{۲۵۶} = ۱۶$ $\sqrt{۲۸۹} = ۱۷$

$\sqrt{۳۲۴} = ۱۸$ $\sqrt{۳۶۱} = ۱۹$ $\sqrt{۴۰۰} = ۲۰$

نکته: اعداد کمتر از یک مانند ۰/۰۱ و ۰/۰۰۰۱ و ... نیز مجذورکامل هستند.

الف) $\sqrt{۰/۰۱} = \sqrt{۰/۱ \times ۰/۱} = ۰/۱$ یا $\sqrt{\frac{۱}{۱۰۰}} = \frac{۱}{۱۰}$

ب) $\sqrt{۰/۰۰۰۱} = \sqrt{۰/۰۱ \times ۰/۰۱} = ۰/۰۱$

چند نکته

۱ جذر یک حاصلضرب را می توان به حاصل ضرب جذرها تفکیک کرد یعنی:

جمع تفکیک نمی شود، ضرب تفکیک می شود

الف) $\sqrt{۹+۱۶} \neq \sqrt{۹} + \sqrt{۱۶}$

ب) $\sqrt{۶۴\times۳۶} = \sqrt{۶۴} \times \sqrt{۳۶} \longrightarrow ۸\times۶=۴۸$

ج) $\sqrt{۰/۲۵} = \sqrt{۲۵ \times ۰/۰۱} = \sqrt{۲۵} \times \sqrt{۰/۰۱} \longrightarrow ۵\times۰/۱ = ۰/۵$

د) $\sqrt{۳} \times \sqrt{۱۲} \longrightarrow \sqrt{۳\times۱۲} = \sqrt{۳۶} = ۶$

هـ) $\sqrt{۰/۵} \times \sqrt{۰/۵} \longrightarrow \sqrt{۰/۲۵} = ۰/۵$

۲ جذر حاصل تقسیم دو عدد با حاصل تقسیم جذرهای آن دو برابر است و بالعکس.

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b\neq0)$ **و بالعکس** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

الف) $\sqrt{\frac{۳۶}{۲۵}} = \frac{\sqrt{۳۶}}{\sqrt{۲۵}} \rightarrow \frac{۶}{۵}$

ب) $\sqrt{\frac{۰/۰۴}{۰/۲۵}} = \frac{\sqrt{۰/۰۴}}{\sqrt{۰/۲۵}} \rightarrow \frac{۰/۲}{۰/۵} = \frac{۲}{۵}$

و یا بالعکس　$\frac{\sqrt{۵۴}}{\sqrt{۶}} = \sqrt{\frac{۵۴}{۶}} \rightarrow \sqrt{۹} = ۳$

۳ در مورد جمع یا تفریق این تفکیک صحیح نمی باشد یعنی جذر حاصل جمع یا تفریق دو عدد با حاصل جمع یا تفریق جذرهای آنها برابر نیست.

$$\boxed{\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

الف) $\sqrt{۹ \pm ۱۶} \neq \sqrt{۹} \pm \sqrt{۱۶}$

ب) $\sqrt{۱۰۰ - ۶۴} \neq \sqrt{۱۰۰} - \sqrt{۶۴}$

مثال: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

الف) $\sqrt{\frac{۳۵}{۱۸}} \div \frac{\sqrt{۵۶}}{\sqrt{۴۵}} = ؟$

پاسخ) $\sqrt{\frac{\cancel{۳۵}^{۵}}{\cancel{۱۸}_{۲}} \times \frac{\cancel{۴۵}^{۵}}{\cancel{۵۶}_{۸}}} = \sqrt{\frac{۲۵}{۱۶}} = \frac{۵}{۴}$

نکته: جذر اعداد بین صفر و یک از خود عدد بزرگتر است

$۰ < x < ۱ \longrightarrow \sqrt{x} > x$

مثال) $\sqrt{۰/۲۵} = ۰/۵ \longrightarrow ۰/۵ > ۰/۲۵$

مثال) $\sqrt{۰/۰۴} = ۰/۲ \longrightarrow ۰/۲ > ۰/۰۴$

جذر تقریبی اعداد ≃

برخی اعداد مانند ۶۰ جذر دقیق ندارند برای بدست آوردن جذر تقریبی این مدل اعداد مراحل زیر را طی می کنیم:

الف) ابتدا مشخص می کنیم عدد ۶۰ بین کدام دو جذر دقیق قرار دارد.

یک **نکته** را لازم است اشاره کنم که این دو عدد صحیح متوالی هستند.

جذر دقیق قبل > $\sqrt{۶۰}$ > جذر دقیق بعد

$\sqrt{۶۰}$ بین دو عدد متوالی ۷ و ۸ قرار دارد.

$$\sqrt{۴۹} < \sqrt{۶۰} < \sqrt{۶۴}$$

$$۷ < \sqrt{۶۰} < ۸$$

ب) مرحله ی بعد: میانگین دو عددی را که ۶۰ بین آنها قرار دارد را پیدا می کنیم و بعد میانگین را به توان ۲ می رسانیم.

$$\frac{۷+۸}{۲} = ۷/۵ \longrightarrow (۷/۵)^۲ = ۵۶/۲۵$$

ج) اگر مجذور میانگین از جذر خواسته شده بزرگتر باشد یک دهم یک دهم کم می کنیم و اگر کوچک تر باشد یک دهم یک دهم بیشتر می کنیم

هر بار مجذور را حساب می کنیم و عدد نزدیک به ۶۰ را انتخاب می کنیم.

$۵۶/۲۵ < ۶۰$

د) در نهایت مقدار تقریبی می باشد برای راحتی کار مطالب را می توان در یک جدول مرتب کرد .

$\sqrt{۶۰} \simeq ۷/۷$ که به ۸ نزدیک تر است تا به ۷

عدد	۷/۵	۷/۶	۷/۷	۷/۸	۷/۹
مجذور	۵۶/۲۵	۵۷/۷۶	۵۹/۲۹	۶۰/۸۴	

مثال صفحه۵۵ کتاب– مشخص کنید:

الف) عدد $\sqrt{۲۸}$ بین کدام دو عدد طبیعی قرار دارد؟

ب) به کدام یک نزدیکتر است؟

ج) جدول را کامل کنید؟

پاسخ الف) $\sqrt{۲۵} < \sqrt{۲۸} < \sqrt{۳۶}$　　بین ۶ و ۵ هست

پاسخ ب) با رسم جدول می بینیم مجذور ۵/۳ تقریبا ۲۸ می شود و ۵/۳ به ۵ نزیکتر است.

عدد	۵	۵/۱	۵/۲	۵/۳	۵/۴
مجذور	۲۵	۲۶/۰۱	۲۷/۰۴	۲۸/۰۹	۲۹/۱۶

بیشتر بدانیم:

۱ ساده کردن رادیکال:

برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی با ریشه۲ (فرجه) در صورت امکان می توان عدد زیر رادیکال را به صورت ضرب دو عدد نشان داد که یکی از آنها جذر داشته باشد مثلا

الف) $\sqrt{۵۰} = \sqrt{\underbrace{۲۵}_{\text{۵جذر}}\times ۲} \rightarrow ۵\sqrt{۲}$

ب) $\underbrace{۶}_{\text{ضریب}}\sqrt{۸} \rightarrow ۶\sqrt{۴\times ۲} \rightarrow ۶ \times ۲\sqrt{۲} \rightarrow ۱۲\sqrt{۲}$

نکته: جذر در ضریب رادیکال ضرب می شود.

۲ جمع و تفریق رادیکال ها:

در صورتی دو عبارت رادیکالی با ریشه ۲ با هم جمع و تفریق می شوند که عدد زیر رادیکال ها یکسان باشد در این صورت کافی است ضریب ها را با هم جمع و تفریق کنیم.

الف) $۵\sqrt{۲} + ۶\sqrt{۲} = ۱۱\sqrt{۲}$

ب) $۴\sqrt{۳} - ۳\sqrt{۳} + ۱۰\sqrt{۳} = ۱۱\sqrt{۳}$

تذکر: در جمع و تفریق رادیکال ها گاهی الزم است ابتدا رادیکال ها را ساده کنیم.

الف) $۵\sqrt{۷۲} - ۶\sqrt{۳۲}$

$\rightarrow ۵\sqrt{\underbrace{۳۶}_{\text{جذر۶}}\times ۲} - ۶\sqrt{۱۶\times ۲}$

$\rightarrow \underbrace{۵ \times ۶}_{\text{ضریب}}\sqrt{۲} - ۶ \times ۴\sqrt{۲} \quad \rightarrow ۳۰\sqrt{۲} - ۲۴\sqrt{۲} = \boxed{۶\sqrt{۲}}$

ب) $۵\sqrt{۱۸} - ۶\sqrt{۳۲}$

$\rightarrow ۵\underbrace{\sqrt{۹\times۲}}_{\text{جذر۳}} - ۶\underbrace{\sqrt{۱۶\times۲}}_{\text{جذر۴}}$

$\rightarrow ۵\times۳\sqrt{۲} - ۶\times۴\sqrt{۲} \rightarrow ۱۵\sqrt{۲} - ۲۴\sqrt{۲} = \boxed{-۹\sqrt{۲}}$

ضرب و تقسیم رادیکالها:

ضرب و یا تقسیم رادیکال ها در صورتی امکان پذیر است که حتماً ریشه های آنها برابر باشند.

مثال) $\sqrt{۲}\times\sqrt{۳} = \sqrt{۶}$

چند مثال برای یادگیری بهتر مطالب(پیشرفته)

۱جذرهای دقیق زیر را حساب کنید؟

الف) $\sqrt{\frac{۳۶}{۱۰۰}} = \frac{۶}{۱۰} = ۰/۶$

ب) $\sqrt{\overset{۲}{\cancel{۱۴}}\times\frac{۷}{\underset{۱}{\cancel{۲}}}} = \sqrt{۴۹} = ۷$

ج) $\sqrt{۲۵\times۴} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$

د) $\sqrt{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}} = \sqrt{\frac{۳+۱}{۹}} = \sqrt{\frac{۴}{۹}} = \frac{۲}{۳}$

هـ) $\sqrt{۳\times۲۷} \times \sqrt{۲۵} = \sqrt{۸۱} \times \sqrt{۲۵} = ۹ \times ۵ = ۴۵$

۲ حاصل عبارت $\sqrt{۱+۲\sqrt{۱+۳\sqrt{۱+۴\sqrt{۱+۵\sqrt{۷(۱+۶)}}}}}$ را بیابید.

پاسخ) از داخلی ترین رادیکال شروع به حل می کنیم.

$$\sqrt{۱+۲\sqrt{۱+۳\sqrt{۱+۴\sqrt{۱+۵\times۷}}}} \rightarrow \sqrt{۱+۲\sqrt{۱+۳\sqrt{۱+۴\times۶}}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱+۲\sqrt{۱+۳\times۵}} \rightarrow \sqrt{۱+۲\times۴} = \sqrt{۱+۸} = \sqrt{۹} = ۳$$

۳ مقدار $\sqrt{۷۵} + ۳\sqrt{۲۷} - ۲\sqrt{۳} - \sqrt{۴۸}$ عبارت کدام است؟

$۱۱\sqrt{۷}$　　　$۷\sqrt{۱۱}$　　　☑ $۸\sqrt{۳}$　　　$۳\sqrt{۸}$

$\sqrt{۳\times۲۵} + ۳\sqrt{۹\times۳} - ۲\sqrt{۳} - \sqrt{۱۶\times۳}$

$۵\sqrt{۳} + ۳\times۳\sqrt{۳} - ۲\sqrt{۳} - ۴\sqrt{۳} = ۸\sqrt{۳}$

جمع و تفریق اعداد توانی

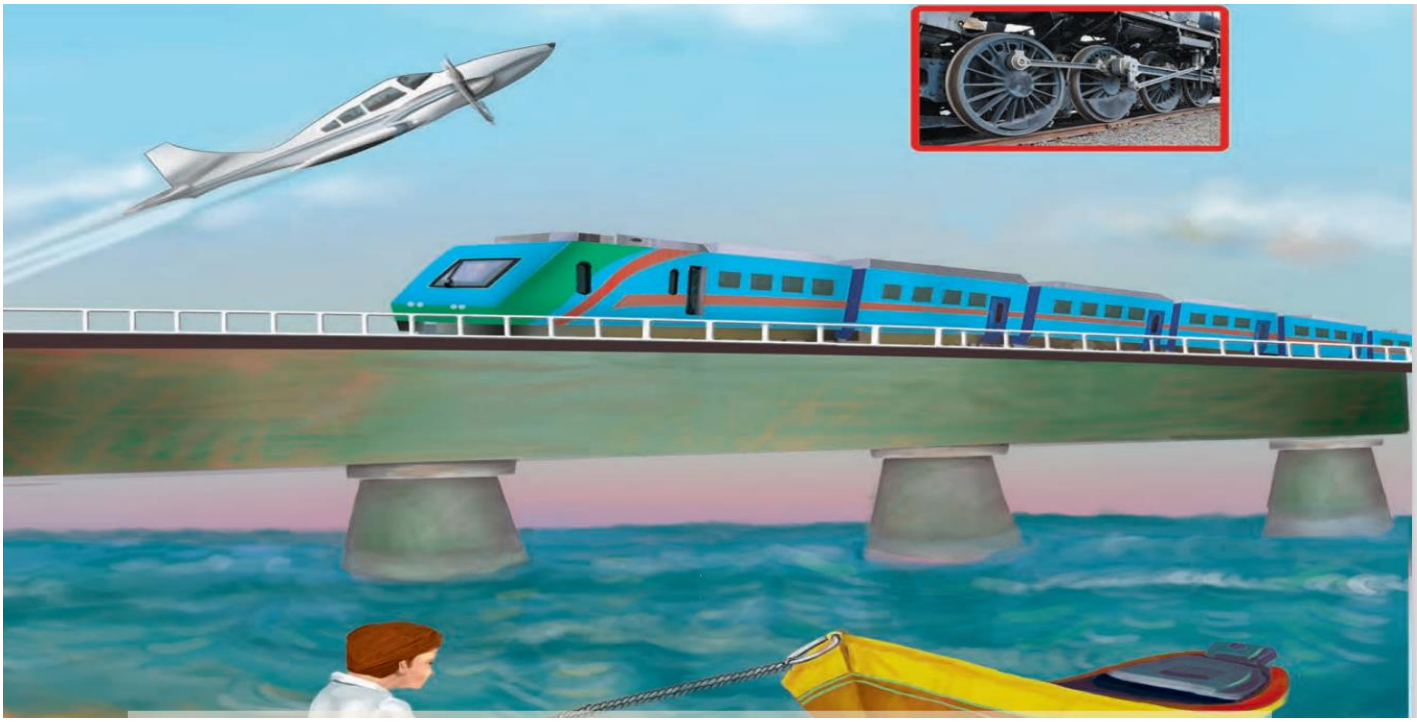
گاهی باید تعداد اعداد توان دار را به صورت ضریب کنار آنها نوشته می شود. مثلاً

۴×۳^{۷} یعنی ۴ تا $۳^{۷}$ و اگر عددی نباشد یعنی ضریب آن یک است.

$۸\times۵^{۷} + ۳۰\times۵^{۷} - ۱۴\times۵^{۷} + ۵^{۷} =$

$۲۵\times۵^{۷} \rightarrow ۵^{۲}\times۵^{۷} = ۵^{۹}$

فصــل ۸
بردار و مختصات



هدف کلی:

آشنایی دانش آموزان با مفهوم بردار و اجزا آن و هم چنین آشنایی با دستگاه

انتظارات از دانش آموزان در این درس

۱ قادر به یافتن مختصات نقطه داده شده، باشند.

۲ بتوانند مکان مختصات نقطه داده شده را روی دستگاه مختصات پیدا کنند.

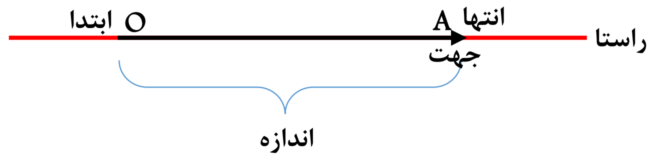
۳ نواحی ۴ گانه مختصات را بشناسند.

۴ بتواند از یک نقطه دلخواه به اندازه برداری که داده شده حرکت کرده و مختصات مکان جدید را بدست آورد.

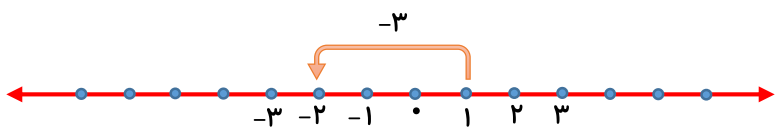
۵ بتواند قرینه یک بردار را روی دستگاه مختصات رسم کرده و مختصات آن را بدست آورد.

بردار: پاره خطی که دارای ابتدا و انتها و جهت می باشد و نشان دهنده حرکت از یک نقطه به نقطه دیگر می باشد .

مثال : بردار OA را به صورت $\overrightarrow{OA}$ نشان می دهیم.

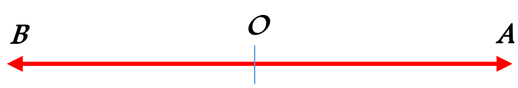


جمع متناظر با بردار: عدد انتهای بردار = عدد متناظر با بردار + عدد ابتدای بردار



(+۱) + (−۳) = −۳

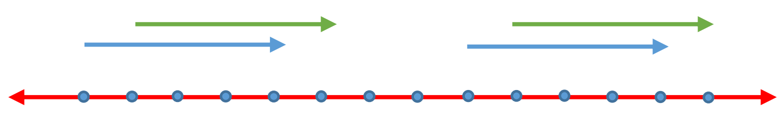
دو بردار قرینه : دو برداری که هم راستا و هم اندازه باشند اما در خلاف جهت هم باشند را دو بردار قرینه می گویند.



قرینه یکدیگرند OB و OA

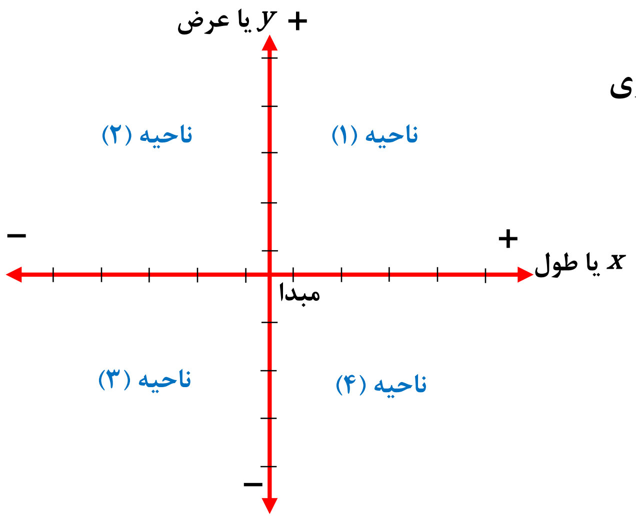
قرینه یکدیگرند DH و MN

دو بردار مساوی : دو برداری که هم راستا و هم اندازه و هم جهت باشند را دو بردار مساوی گویند.



دستگاه محور مختصات : این دستگاه از د و محور عمود بر هم ساخته شده است . به محور افقی ، محور طول ها یا محور X می گویند و به محور عمودی ، محور عرض ها یا محور Y می گویند .

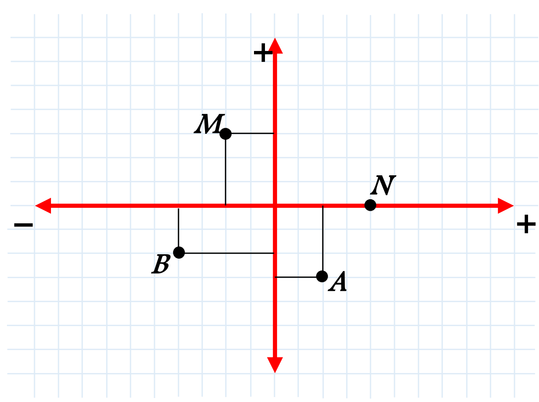
دستگاه صفحه را به چهار قسمت مساوی (ناحیه ،ربع) تقسیم می کند .که از بالا سمت راست خلاف جهت عقربه های ساعت شماره گذاری می کنند



نمایش نقطه روی محور مختصات : ابتدا طول نقطه را روی محور طول ها و بعد عرض نقطه را روی محور عرض ها مشخص مــی کنــیم سپس از این دو نقطه دو خط موازی محورها رسم می کنیم، محل برخورد این دو خط جای نقطه را مشخص می کند.

مثال: الف) نقاط $A = \begin{bmatrix} +۲ \\ -۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۴ \\ -۲ \end{bmatrix}$ را روی محور مختصات نشان دهید.

ب) مختصات نقاط N و M را بنویسید.

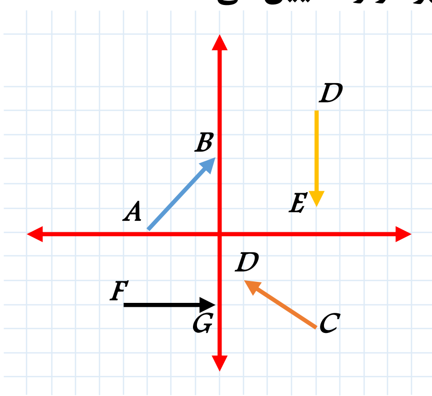


$N = \begin{bmatrix} +۴ \\ ۰ \end{bmatrix}$

$M = \begin{bmatrix} -۲ \\ +۳ \end{bmatrix}$

نکته : اگر نقطه ای روی محور طول ها باشد، عرض آن صفر و اگر روی محور عرض ها باشد ، طــول آن صفر است.

مختصات بردار: برای به دست آوردن مختصات هر بردار، از ابتدای بــردار حرکــت افقــی و ســپس حرکت عمودی را می شماریم. (مثلث قائم الزاویه ای درست می شود). جهت حرکت، علامت بــردار را مشخص می کند و اندازه ی حرکت، عدد بردار را تعیین می کند.



$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} +۳ \\ +۳ \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} -۳ \\ +۲ \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{DE} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۴ \end{bmatrix}$　　$\overrightarrow{FG} = \begin{bmatrix} +۴ \\ ۰ \end{bmatrix}$

❊ اگر بخواهیم جمع متناظر با بردار $\overrightarrow{AB}$ را بنویسیم ، از رابطه زیر استفاده می کنیم:

مختصات انتهای بردار = مختصات بردار + مختصات ابتدای بردار

جمع متناظر با $\overrightarrow{AB}$:　$\begin{bmatrix} -۳ \\ ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +۳ \\ +۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$

جمع متناظر با $\overrightarrow{FG}$:　$\begin{bmatrix} -۴ \\ -۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +۴ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۳ \end{bmatrix}$

نکته ۱ : همه بردار هایی که فقط حرکت افقی دارند عرض آنها صفر است .

نکته ۲ : همه بردارهایی که فقط حرکت عمودی دارند ، طول آنها صفر است .

قرینه ی بردار:

در قرینه ی هر بردار نسبت به محور طول ها، عرض بردار قرینه می شود.

در قرینه ی هر بردار نسبت به محور عرض ها ،طول بردار قرینه می شود.

در قرینه هر بردار نسبت به مبدأ مختصات، طول و عرض بردار قرینه می شوند.

جمع مختصات ها: در جمع مختصات ها طولها با هم و عرض ها با هم جمع می شوند.

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+a \\ n+b \end{bmatrix}$$

مثال: مقدار مجهول را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} x \\ -۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۵ \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱۲ \\ +۱۱ \end{bmatrix}$$

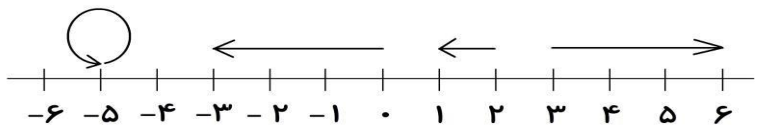
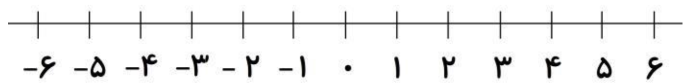
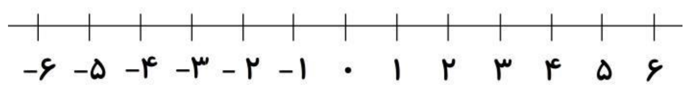
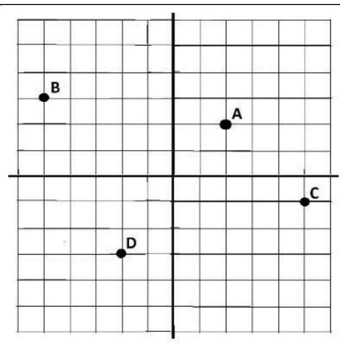
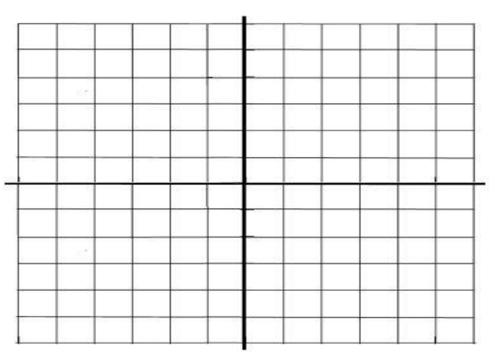
$$x-۵=-۱۲ \Rightarrow x=-۱۲+۵=-۷ \Rightarrow x=-۷$$

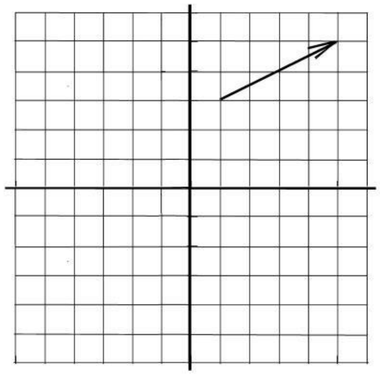
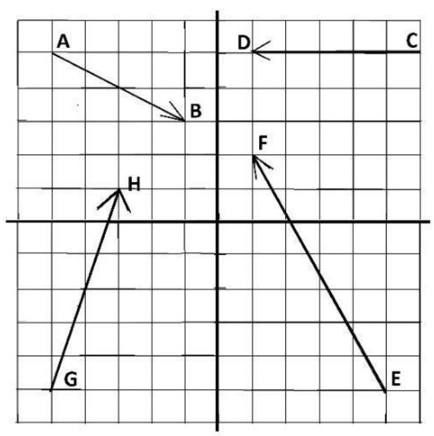
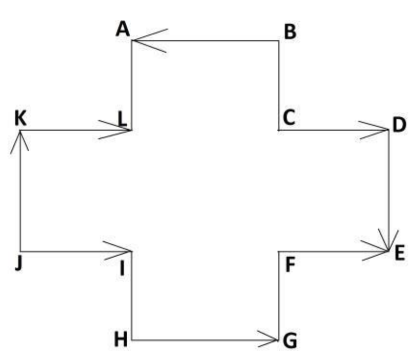
$$-۴+y=+۱۱ \Rightarrow y=+۱۱+۴=+۱۵ \Rightarrow y=+۱۵$$

مثال: حاصل جمع و تفریق های زیر رابه دست آورید.

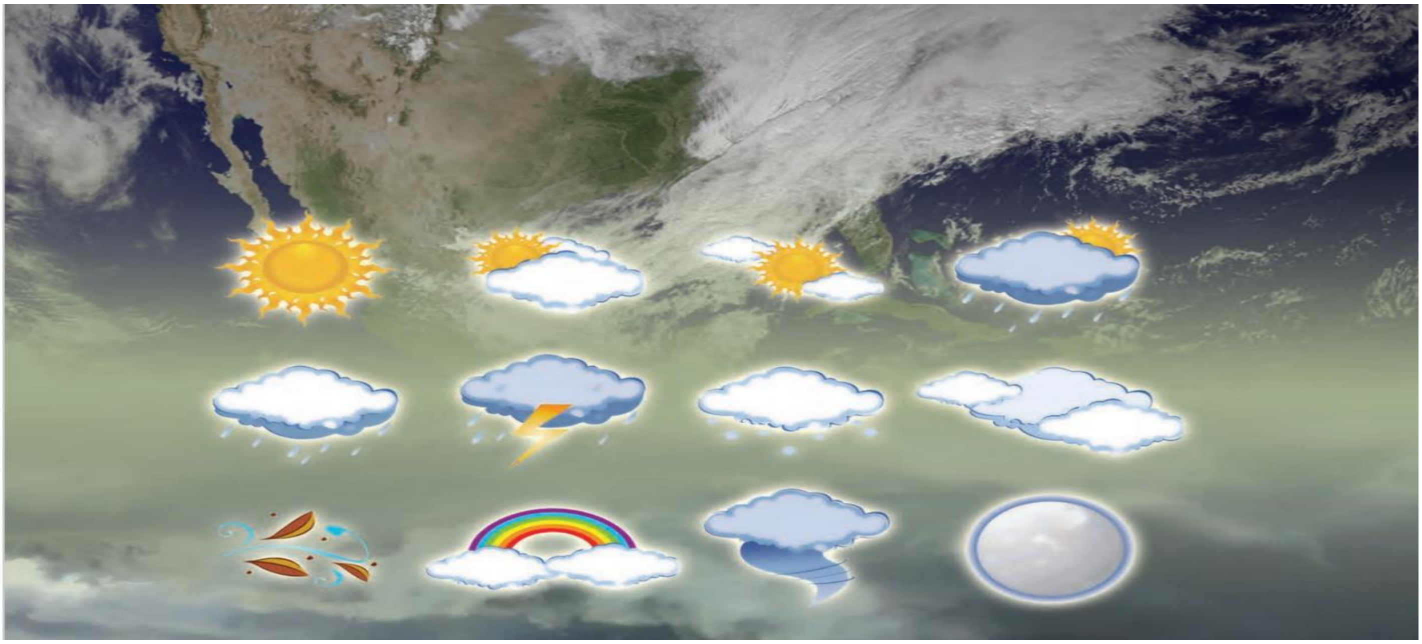
$$\begin{bmatrix} -۲ \\ +۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +۳ \\ -۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +۱ \\ -۳ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} +۳ \\ -۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +۲ \\ +۵ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} +۵ \\ -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +۲+۳-۵ \\ -۱+۵+۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۶ \end{bmatrix}$$

ردیف	سوالات
۱	اندازه ی هر بردار را روی آن بنویسید 
۲	از نقطه ی ۲- برداری که اندازه ی آن ۶+ است را رسم کنید و جمع متناظر آن را بنویسید 
۳	برداری را که ابتدای آن ۳+ و انتهای آن ۲- است را رسم کنید و جمع متناظر آن را بنویسید 
۴	مختصات نقاط A و B و C و D را بنویسید 
۵	نقاط زیر را در دستگاه مختصات پیدا کنید $A = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۳ \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۴ \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} -۴ \\ ۴ \end{bmatrix}$ 

۶	در دستگاه مختصات مقابل بردارهای دلخواه $\vec{b}$ و $\vec{a}$ را مساوی با بردار داده شده و بردارهای دلخواه $\vec{d}$ و $\vec{c}$ را قرینه با آن رسم کنید. مختصات هر یک از بردارهای بالا را بنویسید. 
۷	با نوشتن مختصات نقاط ابتدا و انتها و مختصات هر بردار، جمع متناظر برای هر یک را کامل کنید.  $A + \overrightarrow{AB} = B \quad => \quad [\quad] + [\quad] = [\quad]$ $C + \overrightarrow{CD} = D \quad => \quad [\quad] + [\quad] = [\quad]$ $E + \overrightarrow{EF} = F \quad => \quad [\quad] + [\quad] = [\quad]$ $G + \overrightarrow{GH} = H \quad => \quad [\quad] + [\quad] = [\quad]$
۸	در شکل زیر بردارهای مساوی و بردارهای قرینه را مشخص کنید. 

فصــل ۹
آمار و احتمال



هدف کلی:

آشنایی با علم آمار و احتمال، برای پیش بینی وقوع رخدادها

انتظارات از دانش آموزان در این درس

۱ علم آمار را تعریف کنند

۲ داده ها را در جدول سازماندهی کنند

۳ نمودارهای خط شکسته، نقطه ای، تصویری، ستونی و دایره ای را رسم کنند

۴ کاربرد هریک از نمدارها را در مسائل مختلف درک کنند

۵ برای موضوع مورد نظر نمودار مناسب را انتخاب کنند

۶ بتوانند حتمی، ممکن یا غیر ممکن بودآن یک اتفاق را تشخیص دهند

۷ نتایج مربوط به یک اتفاق تصادفی را ثبت و آزمایش کنند

۸ احتمال رخ دادن یک اتفاق را با نتایج آزمایش ها مقایسه کنند

علم آمار: علمی که به جمع آوری اطلاعات عددی سازماندهی و بررسی آنها می پردازد، **علم آمار** نمایده می شود.

داده: به اطلاعات عددی که از این طریق به دست می آید **داده** می گویند.

وقتی داده های آماری جمع آوری شدند ،اولین گام این است که آنها را در جدول داده ها سازماندهی کنیم برای اینکه شمارش داده ها راحت تر انجام شود.ابتدا تشخیص می دهیم هر داده در کدام خانه باید قرار بگیرد؟سپس به جای آن داده یک چوب خط رسم می کنیم وقتی تعداد چوب خط های هر خانه زیاد می شوند، شمارش آنها دشوار می شود. به همین دلیل چوب خط ها را به دسته های ۵ تایی تقسیم می کنیم به این ترتیب که هرگاه تعداد چوب خط ها به ۵ برسد، چوب خط پنجم را به صورت افقی روی ۴ چوب خط قبلی قرار می دهیم.

به نمونه های زیر توجه کنید.

تعداد	۱	۲	۳	۴	۵
چوب خط	I	II	III	IIII	~~IIII~~

مثال: میزان بارندگی در دوازده ماه یک سال در شهر رشت، به شرح زیر است.جدول داده ها را برای آن تشکیل دهید.

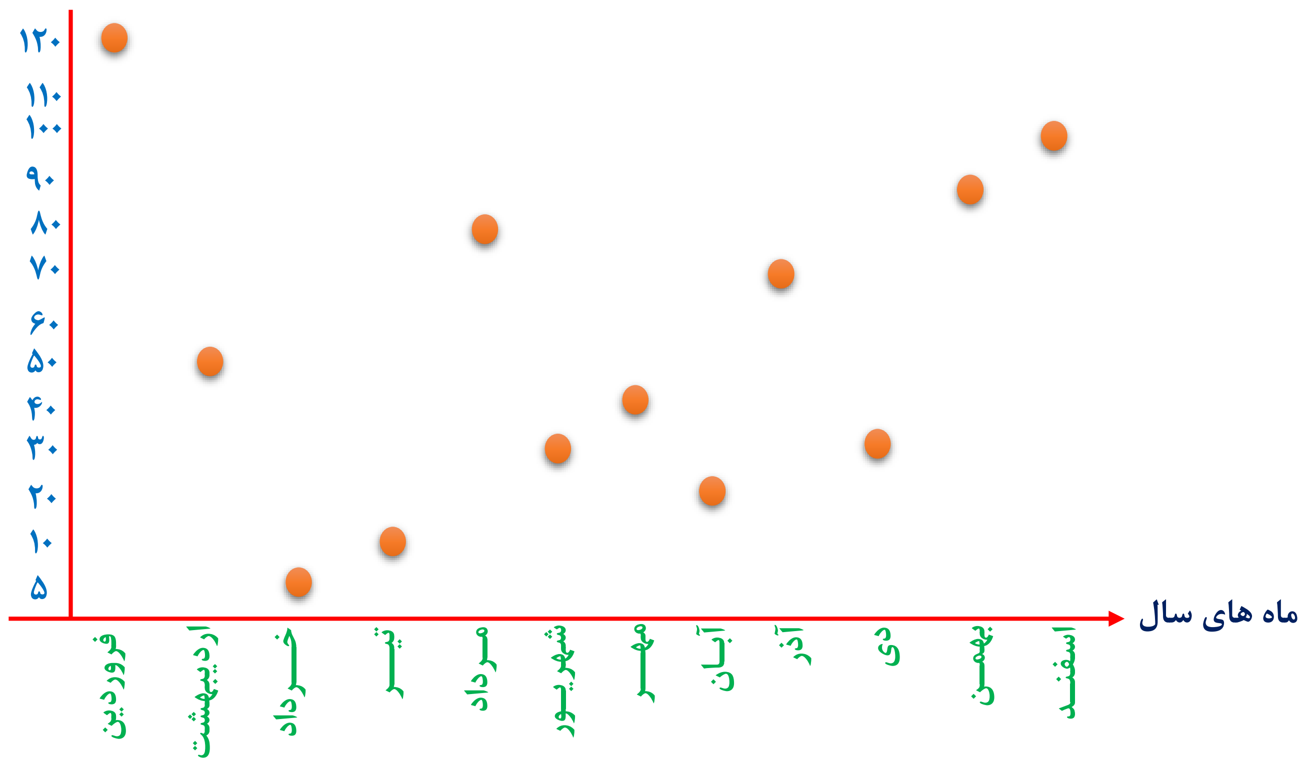
بهمن: ۹۰ میلی متر – فروردین: ۱۲۰ میلی متر – خرداد: ۵ میلی متر – تیر: ۱۰ میلی متر – شهریور: ۳۰ میلی متر–اردیبهشت: ۵۰ میلی متر – مهر: ۴۰ میلی متر – آبان: ۲۰ میلی متر – آذر: ۷۰ میلی متر – دی: ۳۰ میلی متر – اسفند: ۱۰۰ میلی متر – مرداد: ۸۰ میلی متر

ماه	فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد	شهریور	مهر	آبان	آذر	دی	بهمن	اسفند
میزان بارندگی	۱۲۰	۵۰	۵	۱۰	۸۰	۳۰	۴۰	۲۰	۷۰	۳۰	۹۰	۱۰۰

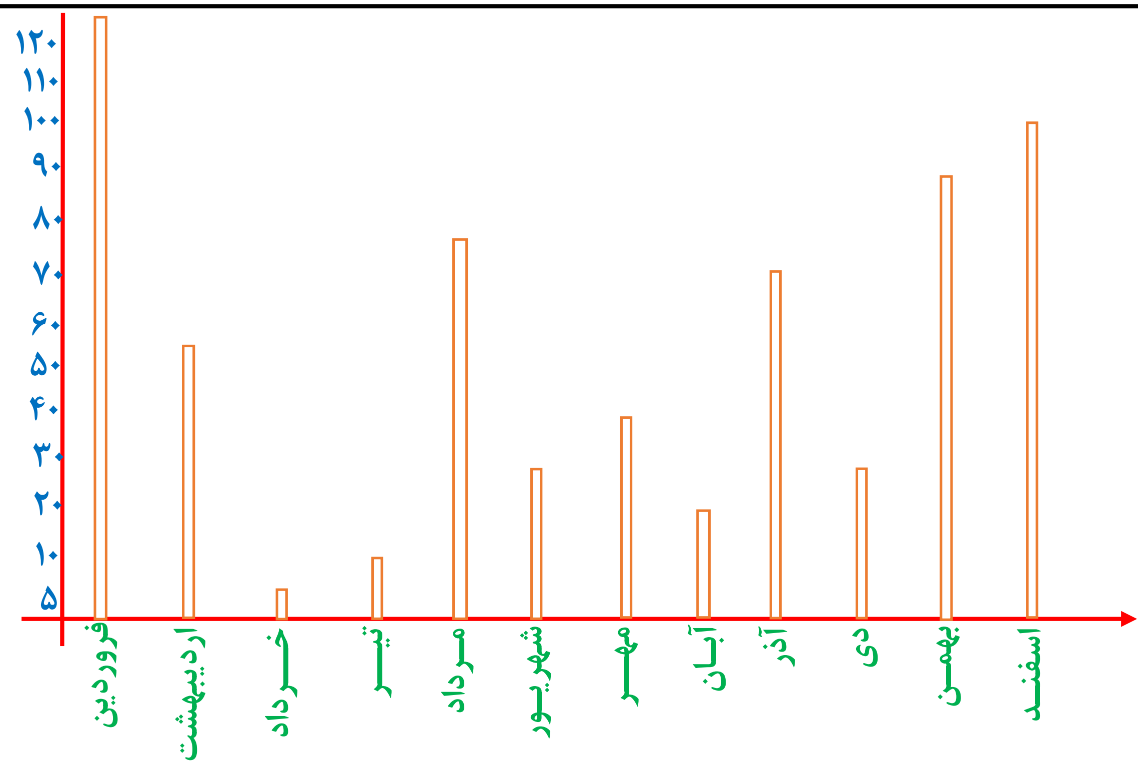
برای مقایسه و بررسی بهتر داده های آماری از انواع نمودارها استفاده می کنیم.با دیدن یک نمودار در یک نگاه می توانیم به اطلاعات زیادی دست پیدا کنیم.جدول ها نیاز به بررسی و تعمق زیادی برای درک یک موضوع دارند.لذا نمودارهای مختلفی در ریاضی طراحی شده اندکه ویژگی اصلی آنها این است که علاوه بر آن که مطالب را به صورتی خلاصه ارائه می کند عمل مقایسه یا استفاده رانیز راحت تر می نماید.انواع نمودار ها عبارتند از:

انواع نمودار
- **نمودار میله ای**
- **نمودار تصویری**
- **نمودار خط شکسته**
- **نمودار نقطه ای**
- **نمودار دایره ای**

نمودار نقطه ای: در این نمودار دو محور عمود بر هم رسم می نماییم و هر محور را محل قرار گرفتن یکی از عامل ها قرار می دهیم. به طور مثال در داده های قبلی، یک محور،محورماه ها و دیگری محور میزان بارندگی. بنابراین بروی محور ماه ها، در نقطه هر ماه خط عمودی بر محور ماه ها رسم و در نقطه عدد بارندگی آن ماه، خطی عمود بر محور میزان بارندگی رسم می کنیم. محل برخورد این دو خط نقطه ای است که میزان بارندگی آن ماه را به خوبی نشان می دهد.



نمودار میله ای: اگر در نمودار نقطه ای خطوط قائم تا نقاط را با عرض کمی رسم نماییم ،مانند آن خواهد بود که هر مورد به صورت یک میله تا مقابل عدد مربوط به خود بالا رفته است.این نمودار برای مقایسه تعداد و پیدا کردن بیش ترین و کم ترین داده مناسب است.

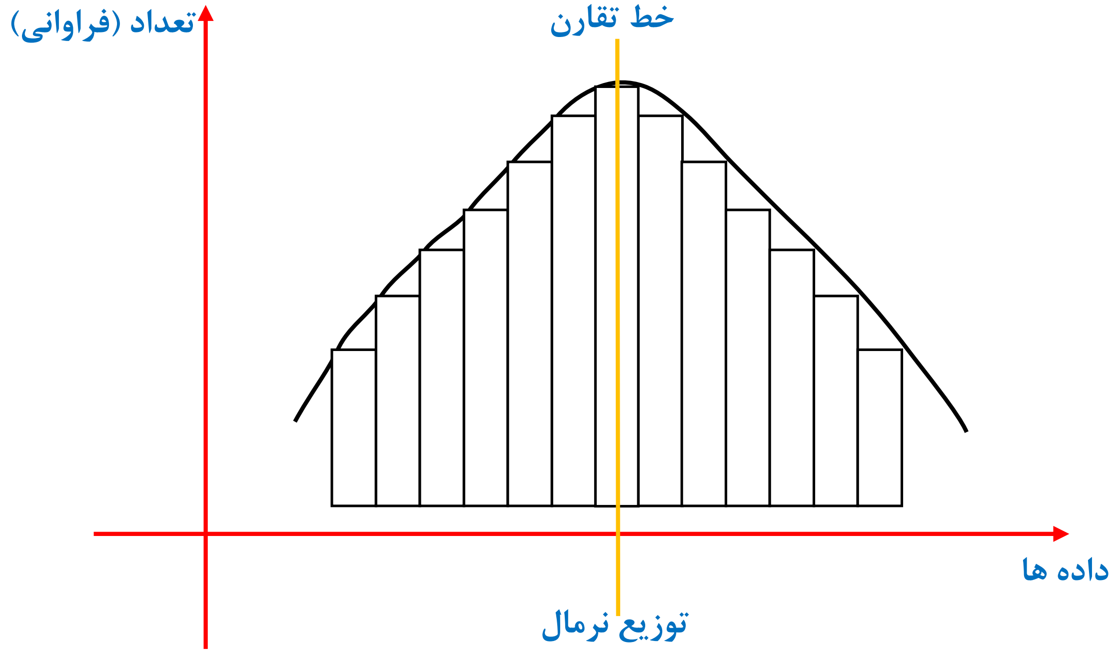


توزیع نرمال:

اگر در یک مطالعه آماری، فراوانی داده ها به صورتی باشد که نمودار ستونی (بلوکی) آن ها متقارن (تقریبا متقارن) شود، میانگین داده ها در دسته ی وسط قرار می گیرد و در اصطلاح می گویند داده ها به صورت **نرمال توزیع** شده اند.

۱ در توزیع نرمال، بیش ترین فراوانی مربوط به دسته میانی است.

۲ دیگر پدیده ها طبیعی مانند قد انسان ها، وزن انسان ها، هوش و استعداد انسان ها، شدت و بزرگی زلزله، طوفان و ... را بررسی و پس از دسته بندی داده ها و پیدا کردن فراوانی دسته ها نمودار ستونی آنها را رسم کنیم، متوجه می شویم که به صورت نرمال توزیع شده اند و این یکی از ویژگی های آفرینش است.



یادمان باشد

وقتی می خواهیم نمودار ستونی رسم کنیم، اجازه داریم جای ستون ها را عوض کنیم.

در نمودار ستونی می تونیم جای محور افقی و عمودی را عوض کنیم وستون ها رو به صورت افقی بکشیم.

***نکته: موقع رسم نمودار ستونی، باید دقت کنیم در محوری که نشان دهنده ی تعداد است، مقیاس را رعایت کنیم و گرنه نمودار ممکن است گول زننده باشد.**

***نکته: در رسم نمودارستونی، ضخامت ستون ها باید هم اندازه باشد تا بیننده ها رو به اشتباه نیندازد.**

***نکته: همه ی نمودارها از جمله نمودار ستونی، نیاز به عنوان دارند، همون توضیح کوتاهی هست که زیر، بالا یا کنار نمودار نوشته می شد و موضوع مورد مطالعه ور مشخص می کنه.**

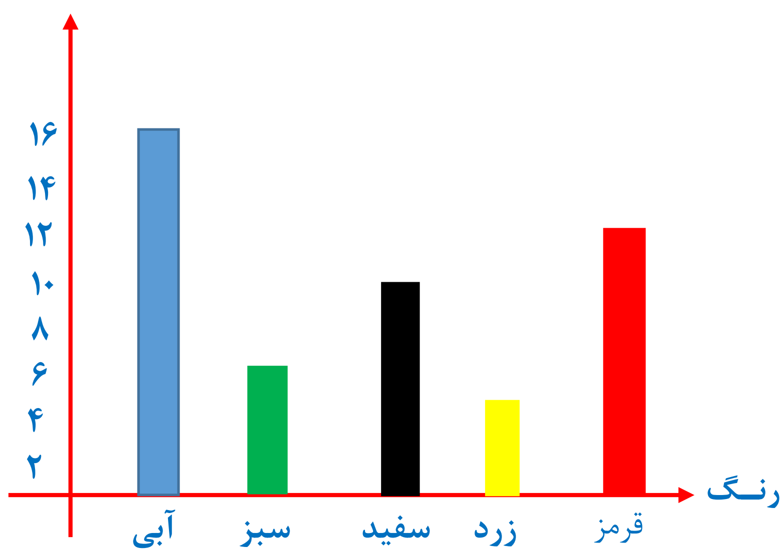
-از ۴۰ نفر دانش آموزان یک مدرسه پرسیده شد: «کدام رنگ را بیش تر دوست دارید؟» جواب های آنها به صورت زیر بود:

آبی، سبز، زرد، قرمز، قرمز، زرد، سفید، سفید، سفید، آبی، آبی، سفید، سبز، سبز، قرمز، سفید، زرد، قرمز، آبی، قرمز، آبی، آبی، قرمز، آبی، سبز، آبی، قرمز، آبی، آبی، قرمز، سفید، قرمز، سفید، آبی، آبی، قرمز، سبز، سفید، آبی، زرد

–این داده را در یک جدول سازماندهی کنید.

رنگ	چوب خط	تعداد
آبی	||| 卌 卌	۱۳
سبز	卌	۵
سفید	||| 卌	۸
زرد	||||	۴
قرمز	卌 卌	۱۰

مثال: نمودار ستونی مربوط به رنگ مورد علاقه ۴۰ دانش آموز مدرسه (**مثال** قبل) به صورت زیر است:



با توجه به نمودار بالا به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) دانش آموزان این مدرسه به کدام رنگ علاقه بیشتری دارند؟

ب) در بین این رنگ ها، کدام رنگ طرفدار کمتری دارد؟

ج) تعداد کسانی که به رنگ قرمز علاقه دارند، چند نفر بیشتر از تعداد کسانی است که به رنگ سفید علاقه دارند؟

د) در مجموع چند نفر به رنگ های زرد یا سبز علاقه دارند؟

پاسخ:

الف) آبی

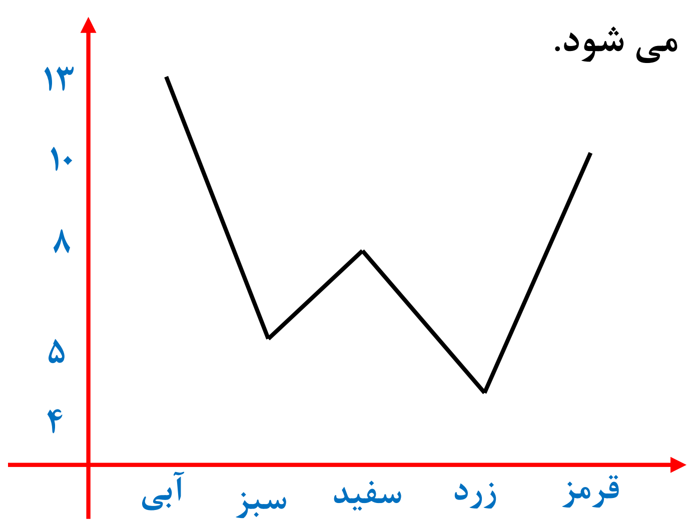
ب) زرد

ج) قرمز: ۱۰ نفر – سفید: ۸ نفر – پس ۲ = ۸ – ۱۰

د) زرد: ۴ نفر – سبز: ۵ نفر – در مجموع: ۹ = ۵ + ۴

نمودار خط شکسته:

اگر در نمودار نقطه ای، از چپ به راست نقاط به دست آمده را به ترتیب به هم وصل کنیم، نمودار خط شکسته حاصل می شود.



این نمودار برای بهتر نشان دادن تغییرات در یک مدت مشخص به کار می رود. رسم نمودار خط شکسته موضوع های مهم اقتصادی نظیر تغییرات قیمت طلا و سکه، نفت، دلار، سهام و ... کمک زیادی به ارزیابی و پیش بینی تغییرات در روزهای آینده خواهد بود.

هنگام تولد هر کودک برگه ای به عنوان « کارت مراقبت کودک» برای او صادرمی شود که در آن چند منحنی برای کنترل وزن، قــد و اندازه ی دور سر کودک در ماه های مختلف پس از تولد رشم شده است. به این ترتیب، تبدیل نمودار خط شکسته به منحنی، علاوه بر پیش بینی وزن و قــد و اندازه دور سر کودک در ماه های آینده می توانیم میزان رشد یا افت آن ها را بررسی کنیم.

نکته: اگر از ابتدای نمودار خط شکسته شروع به حرکت کنیم ،هرجا که سمت بالا می رویم، یعنی نسبت به قبل افزایش داشتیم و هر جا که به سمت پایین حرکت می کنیم ، یعنی نسبت به قبل کاهش داشتیم.

نکته: بیش ترین تغییرات (افزایش یا کاهش) در جایی اتفاق می افتد که شیب پاره خط نسبت به قسمت های دیگر بیشتر باشد.

نمودار تصویری:

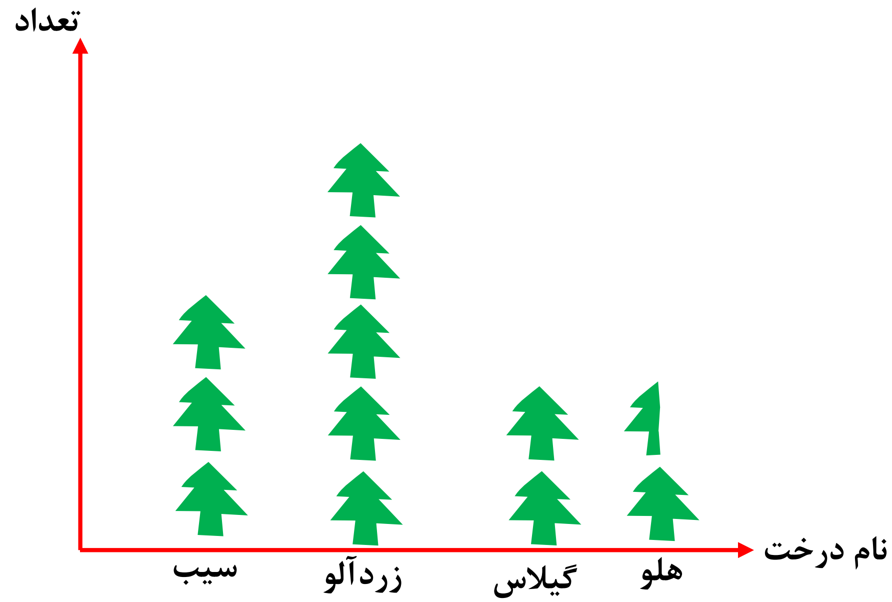
بعضی از مواقع از جمله در برنامه ریزی های کلان اقتصادی، به عدد های دقیق و واقعی نیاز نداریم و به جای داده های واقعی از مقدار تقریبی آن ها استفاده می کنیم.

در این نوع از نمودارها، معادل بخش معینی از موضوع مورد نظر یک تصویر مناسب انتخاب می نمایند. مثلا برای جمعیت یک آدمک استفاده می کنیم. برای راحتی کار می توانیم از تصاویر ساده تری مثل دایره ، مثلث ، مربع یا ... استفاده نماییم.

برای رسم نمودار تصویری، ابتدا یک تصویر را به عنوان واحد برای نمایش اطلاعات انتخاب می کنیم سپس اطلاعات را بر اساس واحد انتخاب شده تقریب می زنیم در پایان موضوعات موجود در جدول را روی یکی از محور ها نوشته و به تعداد لازم مقابل هر کدام، تصویر انتخاب شده را رسم می کنیم.

مثال: تعداد درخت های میوه در یک باغ به شرح زیر می باشد:

نام درخت	تعداد
سیب	۳۱
زردآلو	۴۸
گیلاس	۲۰
هلو	۱۵



نمودار دایره ای:

اگر بخواهیم نسبت یک مقدار مشخصی به کل داده ها را نشان دهیم و سهم هر بخش را معلوم کنیم از نمودار دایره ای استفاده می کنیم. در نمودار دایره ای، معمولا سهم هر بخش را به صورت درصد محاسبه کرده و در صورت لزوم درصد بدست آمده را با تقریب کم تر از ۱۰ گرد می کنیم. اگر بخواهیم نمودار دایره ای را دقیق تر رسم کنیم، اول باید به جای درصد ببینیم اگرتعداد کل ۳۶۰ باشد از هر مقدار چقدر داریم؟

$$\frac{\text{تعداد داده ها مورد نظر}}{\text{تعداد کل داده ها}} = \frac{\text{زاویه}}{۳۶۰} = \frac{x}{۱۰۰}$$

در نمودار دایره ای می توان زاویه مرکزی هر قسمت را از رابطه ی زیربدست آورید:

$$\frac{\text{زاویه}}{۳۶۰}=\frac{\text{تعداد داده ها مورد نظر}}{\text{تعداد کل داده ها}}$$

مثال: در یک باغ در بین ۲۵ درخت، تعداد ۱۰ درخت میوه وجود دارد اگر نمودار دایره ای این درختان را رسم کنیم، زاویه قسمت درختان میوه چند درجه است؟

$$\frac{۱۰}{۲۵}=\frac{\text{زاویه}}{۳۶۰}\rightarrow \text{زاویه}=\frac{۱۰\times ۳۶۰}{۲۵}=۱۴۴$$

درصد مقادیر را می توانیم از رابطه زیر بدست آوریم.

$$\frac{x}{۱۰۰}=\frac{\text{تعداد داده ها مورد نظر}}{\text{تعداد کل داده ها}}$$

مثال: در مثال قبل چند درصد درختان را درختان میوه تشکیل می دهند؟

$$\frac{۱۴۴}{۳۶۰}=\frac{x}{۱۰۰}\rightarrow\frac{۱۰۰\times ۱۴۴}{۳۶۰}=۴۰\%$$

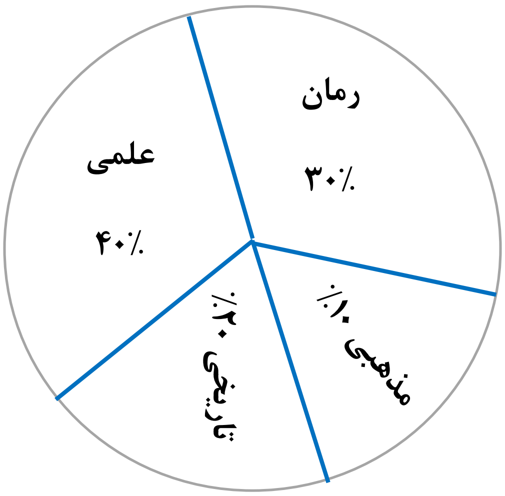
با داشتن اندازه زاویه هر قسمت از نمودار دایره ای نیز می توان درصد داده های مورد نظر را پیدا کنید:

$$\frac{x}{۱۰۰}=\frac{\text{زاویه}}{۳۶۰}$$

مثال: در یک نمودار دایره ای، زاویه مرکزی یکی از داده ها ۱۴۴ می باشد.این داده چند درصدکل داده ها را تشکیل می دهد؟

$$\frac{۱۴۴}{۳۶۰}=\frac{x}{۱۰۰}\rightarrow\frac{۱۰۰\times ۱۴۴}{۳۶۰}=۴۰\%$$

مثال: در یک کتابخانه، مدرسه ای ۳۶۰ جلد کتاب موجود است نمودار دایره ای کتاب های این کتابخانه به صورت نمودار مقابل است. اختلاف کتاب های تاریخی و علمی چقدر است؟



تاریخی　$\frac{۲۰}{۱۰۰} = \frac{۷۲}{۳۶۰}$

اختلاف　۱۴۴ − ۷۲ = ۷۲

علمی　$\frac{۴۰}{۱۰۰} = \frac{۱۴۴}{۳۶۰}$

احتمال یا اندازه گیری شانس

ما در زندگی روزانه خود از کلمه ی احتمال استفاده می کنیم مثلا می گوییم « امروز هوا ابری است و احتمال دارد باران ببارد» بعضی از اتفاق هایی که رخ می دهند، تصادفی هستند، زیرا ما در نتیجه آنها نقشی نداریم. مثلا وقتی یک سکه را به هوا پرتاب می کنیم (بدون کنترل) پیش از آنکه به زمین بیاید نمیدانیم «رو» خواهد آمد یا «پشت».

بعضی از اتفاق ها حتما رخ می دهند، مثلا « تولد نوزاد در یکی از روزهای هفته»

بعضی از اتفاق ها امکان ندارد رخ دهند، مثل « تولد یک نوزاد ۹ متری»

اما بسیاری از اتفاق ها امکان دارد رخ بدهند، ولی حتمی نیستند، مثل « آمدن عدد ۶ در پرتاب تاس»

مثال: از موارد زیر کدام ها حتما رخ می دهند؟ کدام ها ممکن نیست رخ بدهند؟ کدام ها ممکن است اتفاق بیفتند ولی حتمی نیستند؟

الف) اگر بذر گندم بکاریم جو سبز می شود. ← غیر ممکن

ب) اگر خوب تمرین کنیم نمره ریاضی من ۲۰ می شود. ← حتمی نیستند ولی ممکن است

ج) اگر انسان نیکو کاری باشیم، پاداش نیکو می گیریم. ← حتمی

-وقتی یک سکه را پرتاب می کنیم، دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد: یا سکه رو می آید یا پشت. این دو حالت مشابه هم هستند و شانس رو آمدن سکه یا شانس پشت آمدن آن برابر است. بنابراین در پرتاب سکه دو حالت هم شانس ممکن است اتفاق بیفتد. در یکی از این دو حالت ممکن، سکه رو می آید. پس احتمال رو آمدن سکه $\frac{۱}{۲}$ است عدد $\frac{۱}{۲}$، اندازه شانس رو آمدن سکه یا احتمال رخ دادن آن را نشان می دهد.

یادمان باشه

برای اینکه احتمال رخ دادن به اتفاق رو پیدا کنیم، اول همه حالت های ممکن را می نویسیم بعد حالت های مورد نظرمون را پیدا می کنیم. به این ترتیب، احتمال رخ دادن آن اتفاق برابر است با نسبت تعداد حالت های مورد نظر به تعداد کل حالت های ممکن. حالت های مورد نظر ما، حالت های مطلوبند، پس؛

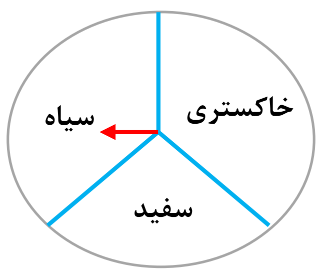
$$\text{احتمال رخ دادن یک اتفاق} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد حالت های ممکن}}$$

* **تعداد حالت های ممکن یک اتفاق با اتفاق دیگر متفاوت است. مثلا:**

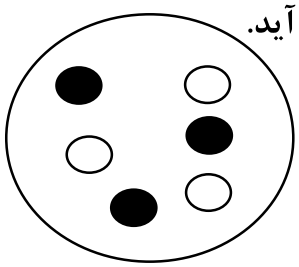
- در پرتاب سکه، دو حالت هم شانس ممکن است اتفاق بیفتد: سکه یا به رو می افتد یا به پشت

- وقتی یک تاس را پرتاب می کنیم،۶ حالت هم شانس ممکن است اتفاق بیفتد: یکی از عددهای ۱ ، ۲، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ می آید.

- وقتی چرخنده زیر را می چرخانیم، سه حالت هم شانس اتفاق می افتد: عقربه روی یکی از رنگ های سیاه، سفید یا خاکستری می ایستد.



- وقتی به طور تصادفی یک مهره از کیسه ی مقابل بر می داریم ۶ حالت هم شانس اتفاق می افتد: یکی از مهره های سفید۱ ، سفید۲، سفید ۳، سیاه۱، سیاه۲، سیاه۳ بیرون می آید.



مثال: احتمال اتفاق افتادن هر اتفاق را با یک کسر بیان کنید و

الف) وقتی سکه را می اندازیم، پشت بیاید.

ب) وقتی تاس را می اندازیم، عددی فرد بیاید.

ج) وقتی چرخنده ی بالا را می چرخانیم، عقربه روی سفید بایستد.

د) وقتی تاس را می اندازیم، روی یکی از شمارنده های ۵ باشد.

هـ) یک نوزاد در روز پنجشنبه متولد شود.

و) در پرتاب تاس، عددی غیر از ۲ بیاید.

پاسخ)

الف) $\frac{۱}{۲}$　　ب) $\frac{۳}{۶}$　　ج) $\frac{۱}{۳}$　　د) $\frac{۲}{۶}$　　هـ) $\frac{۱}{۷}$　　و) $\frac{۵}{۶}$　　$\frac{۱}{۲}$

یادمون باشد

* احتمال رخ دادن یه اتفاق همیشه صفر یا یک یا عددی بین صفر و یک است.

* وقتی یه اتفاق غیر ممکنه، احتمال رخ دادنش صفره، مثل اومدن عدد ۷ در پرتاب تاس.

* وقتی یه اتفاق حتمی باشه، احتمال رخ دادنش یکه، مثل اومدن یه عدد کوچکتر از ۷ در پرتاب تاس.

* وقتی یه اتفاق ممکنه رخ بده، ولی حتمی نیست، احتمال رخ دادنش بین صفر و یکه، مثل اومدن عدد ۳ در پرتاب تاس.

بیشتر بدانیم

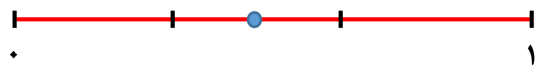
* وقتی در یک اتفاق، احتمال رخ دادن و رخ ندادن برابر باشد، احتمال رخ دادن برابر با : $\frac{۱}{۲}$

وقتی در یک اتفاق، رخ دادن بیش تر از احتمال رخ ندادن باشد، احتمال رخ دادن عددی بین $\frac{۱}{۲}$ و ۱ است.

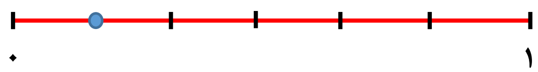
* وقتی یه اتفاق، احتمال رخ دادنش کمتر از احتمال رخ ندادنش باشه، احتمال رخ دادنش بین صفر و $\frac{۱}{۲}$ هست.

– احتمال رخ دادن هر اتفاق را می توان با قرار دادن یک نقطه روی پاره خط نشان داد.

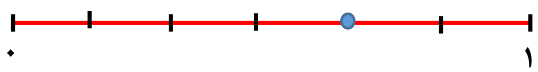
الف) در پرتاب سکه پشت بیاید.



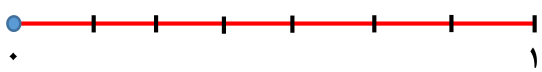
ب) در پرتاب تاس، عدد ۵ بیاید.



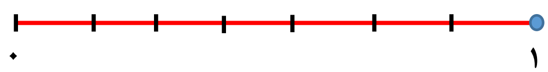
ج) در پرتاب تاس عددی کوچک تر از ۵ بیاید.



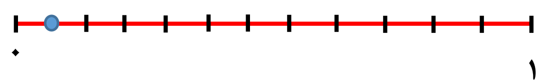
د) بلافاصله بعد از فصل پاییز، فصل بهار بیاید.



هـ) مجموع دو عدد فرد عددی زوج شود.



و) معلم ورزش ما، در همین ماه متولد شده باشد.



۱ صحیح – غلط بودن عبارت را مشخص کنید.

الف- درون کیسه ای سه مهره ی غیر همرنگ وجود دارد، اگر یک مهره به تصادف بیرون بیاوریم سه حالت هم شانس داریم.

ب- علم آمار، علم بررسی و سازمان دهی اطلاعات است.

پ- جدول داده ها جدولی است که اطلاعات جمع آوری شده در آن قرار می گیرد.

ت- نمودار خط شکسته، مقدارهای تقریبی داده ها را نشان می دهد.

ث- نمودار دایره ای ، مقدار داده ها را نسبت به کل داده ها نشان می دهد.

ج- نمودار تصویری مقدار داده ها را به شکل تقریبی نشان داده می دهد.

چ- در نمودار دایره ای اگر ۴۸ درصد را با مخرج ۱۰ نشان دهیم تقریباً به صورت $\frac{۵}{۱۰}$ به دست می آید.

ح- اگر سکه ای را پرتاب کنیم حتما رو می آید.

خ- در پرتاب سکه دو حالت ممکن است رخ دهد.

د- احتمال آن که در پرتاب یک تاس عدد صفر بیاید، برابر یک است.

ذ- تاسی را پرتاب می کنیم، احتمال آنکه عدد ۲ یا ۳ بیاید برابر $\frac{۱}{۶}$ می باشد.

ر- احتمال رخ دادن یک اتفاق همیشه عددی کسری است که صورت آن از مخرجش کمتر است.

۲ هر یک از جملات زیر را با عدد یا واژه ی مناسب کامل کنید.

الف- در جدول آماری اطلاعات بدست آمده .... نامیده می شود.

ب- از نمودار در آمار برای .... و .... داده ها استفاده می کنیم.

پ- در جدول داده ها خط نشان مربوط به عدد ۷ به صورت .... نمایش داده می شود.

ت- اگر بخواهیم اطلاعات دقیق تری از یک نمودار میله ای کسب کنیم.بهتر است٬ تعداد ستون ها را .... کنیم.

ث- نمودار خط شکسته .... نمرات یک دانش آموز٬ در طول یک سال تحصیلی را بهتر نشان می دهد.

ج- در نمودار تصویری مقدار داده ها به صورت .... نمایش داده می شود.

چ- اتفاق « بعد از چهارشنبه ٬پنج شنبه می آید» یک اتفاق .... است.

ح- احتمال آمدن عدد ۷ در پرتاب یک تاس .... است.

خ- احتمال آمدن یک عدد زوج بزرگتر از ۲ در پرتاب یک تاس برابر .... می باشد.

د- اگر زیاد تمرین کنیم در آزمون ورودی المپیاد .... است که قبول شویم.

ذ- شانس رخ دادن یک اتفاق می تواند عددی بین .... و .... باشد.

۳ گزینه ی صحیح را مشخص کنید.

الف- بعد از انجام یک سری تحقیقات مشخص شد رنگ بنفش بیشتر از رنگ سیاه طرفدار دارد. پس ستون مربوط به رنگ بنفش در نمودار میله ای .... است.

۱)بلندتر ۲)کوتاه تر ۳)پهن تر ۴)باریک تر

ب- در یک نمودار دایره ای مربوط به تعداد کتاب های یک کتاب خانه اگر $\frac{۱۷}{۲۵}$ قسمت مربوط به کتاب های کمک درسی باشد، کتاب های کمک درسی چند درصد این کتاب خانه را تشکیل می دهند؟

۱)۶۰ درصد ۲)۶۸ درصد ۳)۷۸ درصد ۴)۱۰۰ درصد

پ-کدام جمله زیر نادرست است؟

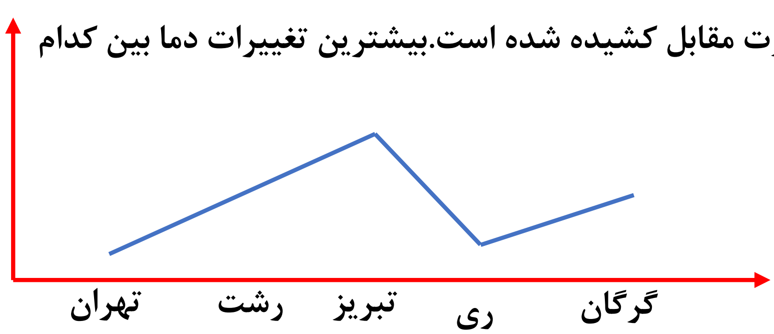
۱)نمودار ستونی برای مقایسه کردن و مشخص کردن بیشترین و کمترین استفاده می شود.

۲)نمودار خط شکسته برای نشان دادن تغییرات در یک مدت مشخص را نشان می دهد.

۳)نمودار تصویری برای مقایسه ی داده ها با مقدار دقیق آن ها استفاده می شود.

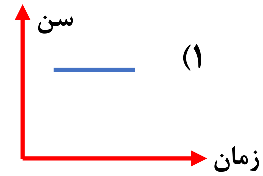
۴)نمودار دایره ای برای نشان دادن نسبت به کل و یا سهم با درصد استفاده می شود.

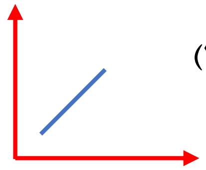
ت- نمودار دمای هوای چهار شهر به صورت مقابل کشیده شده است.بیشترین تغییرات دما بین کدام دو شهر است؟

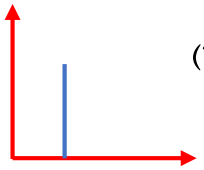


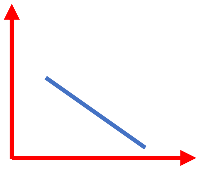
۱)تهران-گرگان ۲)تهران-تبریز ۳)ری-گرگان ۴)تبریز-ری

ث- کدام گزینه زیر رابطه ی بین زمان و سن را به درستی نشان می دهد؟

۱)


۲)


۳)


۴)


ج- یک سکه و یک تاس را با هم انداختیم. احتمال آنکه سکه رو بیاید و تاس عدد زوج بیاید کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

چ- کیسه ای دارای ۲ مهره ی زرد و ۳ مهره ی بنفش است. مهره ای به تصادف از کیسه خارج می کنیم احتمال اینکه مهره زرد باشد کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

د-بلند ترین قد دانش آموزان یک کلاس ۱۷۷ سانتی متر و کوتاه ترین آنها ۱ متر و ۶۵ سانتی متر است.کدام عدد بر حسب سانتی متر می تواند میانگین طول قد دانش آموزان این کلاس باشد؟

۱)۱۶۵ ۲)۱۶۷ ۳)۱۷۷ ۴)۱۷۸

ذ- میانگین ۵۰ عدد ۶۴ می باشد.اگر کوچک ترین و بزرگ ترین عدد را حذف کنیم میانگین بقیه ی اعداد چه تغییری می کند؟

۱)کم می شود ۲)زیاد می شود ۳)تغییر نمیکند ۴)تغییرات مشخص نیست

ر-میانگین سری اعداد ۹۵و.... و ۱۵ و ۱۰ و ۵ کدام است؟

۱)۵۰ ۲)۴۵ ۳)۴۰ ۴)۵۵

ز- دو تاس را با هم انداختیم احتمال آن که مجموع اعداد رو شده ۱۳ شود کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۱۲}$　　　　۲) $\frac{۲}{۱۲}$　　　　۳) یک　　　　۴)صفر

س- در پرتاب ۴ سکه با هم احتمال این که ۳ سکه رو یا فقط ۳ سکه پشت بیاید کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۶}$　　　　۲) $\frac{۷}{۱۶}$　　　　۳) $\frac{۲}{۳}$　　　　۴) $\frac{۱}{۲}$

$\frac{۸}{۹}$　　　　$\frac{۳}{۲}$

ش- خانواده ای دارای ۳ فرزند هستند. احتمال این که ۲ فرزند این خانواده دختر باشند کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۸}$　　　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　　　۳) $\frac{۳}{۸}$　　　　۴) $\frac{۵}{۸}$

ص- در یک کیسه ۱۲ مهره ی قرمز ۱۰ مهره ی آبی و ۲۰ مهره ی سفید و ۵ مهره ی زرد وجود دارد. با چشمان بسته حداقل چند مهره را می توانیم از کیسه برداریم که ۲تا از مهره ها حتما سفید باشد؟

۱) ۳　　　　۲) ۳۲　　　　۳) ۲۹　　　　۴) ۴۹

ض- کدام یک از گزینه های زیر نمی تواند احتمال وقوع یک پیشامد باشد؟

۱)صفر　　　　۲)　　　　۳)　　　　۴)یک

۴ نمره های مستمر درس هنر دانش آموزی در یک سال تحصیلی به شکل زیر است.

الف- نمودار مناسب مربوطه را رسم کنید

ب- نام این نمودار چیست؟

پ- میانگین نمرات او را محاسبه کنید.

ماه	نمره
مهر	۱۸/۵
آبان	۱۷
آذر	۱۹
دی	۱۶
بهمن	۲۰
اسفند	۱۶/۵
فروردین	۱۹/۵
اردیبهشت	۱۸