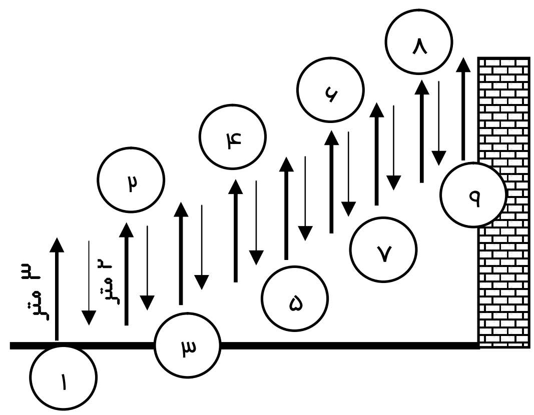
فصل اول : راهبردهای حل مسئله

۱- راهبرد رسم شکل :

کشیدن یک شکل مناسب می تواند به حلّ مسئله کمک کند یا به طور کامل آن را حل کند ؛ به طوری که نیازی به نوشتن عملیات و محاسبه نباشد . گاهی ممکن است شکل را فقط تصور کنید و آن را رسم نکنید . منظور از رسم شکل ، نقّاشی نیست ؛ بلکه میتوانید برای این کار شکل های ساده بکشید.

مثال : قورباغه ای می خواهد از یک دیوار عمودی بالا برود . او با هر جهش **۳** متر بالا می رود و هر بار **۲** متر سُر می خورد و پایین می آید .اگر ارتفاع دیوار ۹ متر باشد ، او با چند جهش به بالای دیوار می رسد؟



همانطور که در شکل پیداست با نهمین پرش به بالای دیوار میرسد .

۲ - راهبرد الگوسازی (تفکّر نظام دار) :

برای حلّ بعضی از مسئله ها باید همهٔ حالت های ممکن را بنویسید . برای اینکه هیچ حالتی از قلم نیفتد ، لازم است آنها را با نظم، الگو و ترتیبی مشخص بنویسید . الگوسازی به شما کمک میکند تا مطمئن شوید همهٔ حالت ها را نوشته اید. بنابراین در مسئله هایی که لازم است همهٔ جواب ها و پاسخ های ممکن را بنویسید ، می توانید از این راهبرد استفاده کنید . با توجّه به نظم و ترتیبی که می سازید، به این راهبرد تفکّر نظام دار نیز می گویند.

مثال : دو عدد طبیعی پیدا کنید که حاصل ضرب آنها **۲۴** و حاصل جمع آنهاکمترین مقدار باشد .جدول را با یک نظم و ترتیب کامل کنید.

حاصل جمع	دومین عدد	اولین عدد
۲۵	۲۴	۱
۲۴	۱۲	۲
۱۱	۸	۳
۱۰	۶	۴

جواب سطر رنگی می باشد .

۳ - راهبرد حذف حالت های نامطلوب :

به شرایط و اطّلاعات مسئله توجه کنید و حالت های نامطلوب و نادرست را کنار بگذارید ؛ آنگاه پاسخ مسئله یا همان حالت های مطلوب به دست می آیند . برای پیداکردن تمام حالت های ممکن می توانید از راهبرد الگوسازی استفاده کنید . ابتدا فهرستی از تمام حالت ها به دست آورید؛ سپس با توجّه به شرایط گفته شده در مسئله ، حالت های نامطلوب را حذف کنید.

مثال : مجموع سنّ سه نفر **۱۴** سال و حاصل ضرب سنّ آنها **۷۰** است. سنّ بزرگ ترین نفر چقدر است؟

حاصل ضرب	مجموع	سن بزرگتر	نفر دومی	نفر اولی
~~۷۰~~	~~۱۴~~	~~۸~~	~~۴~~	~~۲~~
~~۷۰~~	~~۱۴~~	~~۷~~	~~۴~~	~~۳~~
۷۰	۱۴	۷	۵	۲

٤ - راهبرد الگویابی :

در ریاضی با دو نوع الگوی عددی یا هندسی روبه رو می شویم . کشف الگو ، رابطه و نظم موجود در بین دنباله های عددی یا هندسی کمک می کند تا بتوانید خواستهٔ مسئله را به دست آورید. این راهبرد در مسئله هایی کاربرد دارد که بین شکل ها یا عددها ، الگو و رابطهٔ خاصی وجود داشته باشد.

مثال : سه عدد بعدی الگوی زیر را بنویسید. رابطهٔ بین عددها را توضیح دهید.

۱و۴و۹و۱۶و   و   و

اگر با دقت به اعداداین الگو توجه کنیم ، متوجه میشویم که همگی آنها مجذور شده اند . (به توان ۲ رسیده اند)

پس مجذورهای بعدی را به سادگی می نویسیم .

۱و۴و۹و۱۶ و ۲۵ و ۳۶ و ۴۹

۵ - راهبرد حدس و آزمایش :

ممکن است حلّ یک مسئله ، روش و راه حلّ مستقیمی نداشته باشد یا راه رسیدن به جواب آن طولانی و دشوار باشد . شما می توانید با یک روش منطقی و منظّم پاسخ احتمالی مسئله را حدس بزنید؛ سپس با توجه به شرایط گفته شده در مسئله ، حدس خود را بررسی کنید و با توجّه به نتیجهٔ به دست آمده حدس بعدی را بزنید تا کم کم به پاسخ مسئله نزدیک شوید . برای نشان دادن حدس ها و آزمایش های خود راه حل مناسبی پیدا کنید.

مثال : **۲۰** دستگاه دوچرخه و سه چرخه در یک پارکینگ وجود دارد . اگر تعداد کلّ چرخ های آنها **۴۵** عدد باشد ، چند دوچرخه و چند سه چرخه در پارکینگ وجود دارد؟

بررسی و آزمایش	سه چرخه ها	دو چرخه ها
~~۲۰ + ۳۰ = ۵۰~~	~~۱۰~~	~~۱۰~~
~~۲۲ + ۲۷ = ۵۴~~	~~۹~~	~~۱۱~~
~~۲۶ + ۲۱ = ۴۷~~	~~۷~~	~~۱۳~~
۳۰ + ۱۵ = ۴۵	۵	۱۵

۶ - راهبرد زیرمسئله :

مسئلهٔ پیچیده و چند مرحله ای را به چند مسئلهٔ ساده تبدیل کنید . فهرستی از این زیرمسئله ها را درست کنید؛ سپس به ترتیب به آنها پاسخ دهید .اگر ترتیب زیرمسئله ها را درست تشخیص داده باشید ، حلّ هر زیرمسئله به حلّ مسئلهٔ بعدی کمک می کند تا در نهایت به خواستهٔ اصلی مسئله برسید.

مثال : پس انداز هفتگی محمد، **۳۰۰۰** تومان است .اوحساب کرد **۵** هفته پس انداز او، نصف قیمت کیفی است که دوست دارد بخرد. قیمت کیف چقدر است؟

الف) پس انداز ۵ هفته چقدر می شود؟ **۳۰۰۰ × ۵ = ۱۵ ۰۰۰**

ب) اگر این عدد نصف قیمت کیف باشد، قیمت کیف چقدر است؟ **۱۵ ۰۰۰ × ۲ = ۳۰۰۰۰**

۷ - راهبرد حل مسئلهٔ ساده تر :

برای حلّ بعضی از مسئله ها ، ابتدا مسئله ای ساده تر را که با مسئلهٔ اصلی در ارتباط است ، حل میکنیم .سپس بااستفاده از نتیجه و پاسخ مسئلهٔ ساده شده ، جواب مسئلهٔ اصلی را به دست می آوریم . برای ساده کردن مسئله می توان از عددهای تقریبی یا عددهای کوچک تر استفاده کرد . برای نتیجه گیری و پیدا کردن پاسخ مسئلهٔ اصلی از راهبرد الگویابی استفاده می کنیم و الگوی کشف شده در مسئلهٔ ساده را به مسئلهٔ اصلی مرتبط می کنیم.

مثال : قطر خورشید **۱۳۹۲۵۳۰** کیلومتر وقطر کره زمین **۱۲۷۵۶/۶** کیلومتر است . قطر خورشید تقریباً چند برابر قطر زمین است؟

برای ساده شدن مسئله بهتر است از عددهای تقریبی استفاده کنید. خلاصهٔ مسئله ساده شده را بنویسید و پاسخ دهید.

۱۳۹۲۵۳۰ ≃ ۱۰۰۰،۰۰۰

۱۲۷۵۶/۶ ≃ ۱۰ ، ۰۰۰

۱۰۰۰،۰۰۰ ÷ ۱۰ ، ۰۰۰ = ۱۰۰

۱۳۹۲۵۳۰ ÷ ۱۲۷۵۶/۶ ≃ ۱۰۰

۸ - راهبرد روش های نمادین :

بسیاری از مسئله ها را می توانیم به کمک نمادهای جبری به یک معادله تبدیل کنیم. از فصل سوم به بعد می توانید از این راهبرد نیز برای حلّ مسئله استفاده کنید . در بعضی از مسئله ها هم می توانیم از مدل سازی هندسی استفاده کنیم.
تبدیل مسئله به یک شکل هندسی و حلّ هندسی آن نیز نوعی روش نمادین یا مدل سازی به شمار میرود.

مثال : احمد **۳۰۰۰۰** تومان پول داشت . او **۴** دفتر خرید و **۲۰۰۰** تومان برایش باقی ماند. قیمت هر دفتر چقدر است؟

متن این سؤال را می توانید با تساوی زیر نشان دهید .

۴ × □ + ۲۰۰۰ = ۳۰۰۰۰

که مربع نشان دهندهٔ تعداد دفتر هاست .

اکنون می توانید عددی را که باید در مربع قرار گیرد، حدس بزنید و آزمایش کنید.

۴ × $\boxed{۷۰۰۰}$ + ۲۰۰۰ = ۳۰۰۰۰

فصل دوم عددهای صحیح

عددهای علامت دار :

در ریاضیّات برای ساده و مختصر کردن بیان عدد های علامت دار از علامت های + و - استفاده میکنیم.

برای تعیین علامت عدد ها نیاز داریم که محلّ مبدأ و واحد اندازه گیری و همچنین جهت های مثبت و منفی را قرارداد کنیم و براساس آن ، عدد ها را علامت دار کنیم.

برای یکی شدن قرارداد ها سمت راست را روی محور **مثبت** و سمت چپ را منفی در نظر میگیرند.

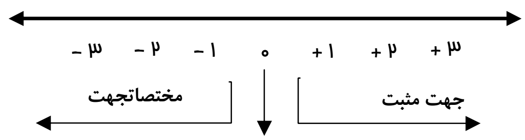
هر یک از عددهای **... و ۳+ و ۲+ و ۱+ و ۰ و ۱− و ۲− و ۳− و ...** را عدد های صحیح می نامیم.

"عدد صفر نه مثبت است و نه منفی."

هرچه به سمت مثبت پیش می رویم، عدد ها بزرگتر می شوند . بنابراین می توان نوشت : **۱+ > ۱−**

صفر

(نه مثبت است نه منفی ؛ بلکه مبدأ است)



قرینه اعداد صحیح :

قرینهٔ هر عدد منفی عددی مثبت و قرینهٔ هر عدد مثبت عددی منفی است .

* قرینهٔ صفر هم خود صفر است.
* برای نمایش قرینهٔ هر عدد از نماد (-) درسمت چپ آن عدد استفاده می کنیم.

(+۸) قرینهٔ = −(+۸) = −۸

(−۵) قرینهٔ = −(−۵) = +۵

* قرینهٔ هر عدد صحیح را می توان با تغییر علامت آن عدد به دست آورد .
* قرینهٔ ، قرینهٔ هر عدد صحیح ، مساوی خودش است .

−[−(−۳)] = −۳

−[−(+۶)] = +۶

* عددهای صحیح مثبت همان عددهای طبیعی اند، برای مثال می توان نوشت: **۶ = ۶+ یا ۳ = ۳+**
* عددهای صحیح شامل عددهای صحیح مثبت ، صفر و عددهای صحیح منفی می شوند.
* جمع هر عدد صحیح با قرینه اش برابر صفر می شود.

۷ − ۷ = ۷ + (−۷) = ۰

* جمع هر عدد صحیح با صفر برابر خودش می شود.

(−۹) + ۰ = (−۹) یا ۴ + ۰ = ۴

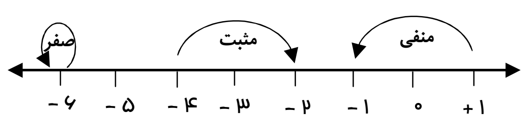
* هر عدد صحیحِ مثبت از هر عدد صحیحِ منفی بزرگتر است.
* همهٔ عددهای صحیحِ مثبت ازصفر بزرگ ترند.
* همهٔ عددهای صحیح منفی از صفرکوچکتر هستند.

حرکت روی محور عددهای صحیح :

شامل دو بخش زیر است ؛

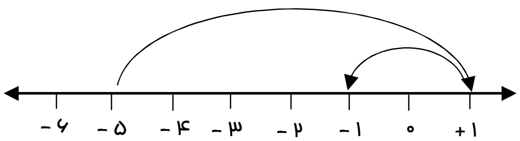
الف) جهت : حرکت به سمت راست مثبت + ، حرکت به سمت چپ منفی − ، درجای خود حرکت ۰ (صفر)

ب) اندازه : به مقدار جابجایی که با عدد نشان داده می شود .



جمع عددهای صحیح روی محور :

اگر دو یا چند حرکت روی محور پشت سر هم انجام گیرد ، می توان برای این حرکات یک تساوی جمع نوشت ؛



(+ ۶) + (− ۲) = (+ ۴)

جمع و تفریق عددهای صحیح (بدون محور) :

باید گام های زیر را به ترتیب انجام داد :

گام اول : مختصر یا ساده نویسی ؛ پرانتزها را حذف کنید .

گام دوم : تعیین علامت ؛ اگر قبل از عددی بیش از یک علامت وجود داشت ، باید به کمک عمل ضرب آنها را به یک علامت تبدیل کنید .

+ (− ۲)   یا   − (− ۷)

برای این کار از جدول داده شده کمک بگیرید :

×	+	−
+	+	−
−	−	+

گام سوم : تعیین علامت حاصل ؛ پس از مختصر نویسی و تعیین علامت عددهای صحیح نوبت به یافتن علامت جواب (حاصل) می باشد .

اگر هر دو علامت یک جور بود ، یک علامت را برای جواب قرار داده و عددها را جمع می کنیم ؛

۸ − (+ ۷) = ۸ − ۷ = + ۱

(− ۱۲) + (− ۷) = − ۱۲ − ۷ = − ۱۹

اگر علامت ها یک جور نبود ، علامت عدد ظاهراً بزرگتر را برای جواب قرارداده و عددها را از هم کم میکنیم .

۸ − (− ۷) = ۸ + ۷ = + ۱۵

(− ۱۸) + (+ ۱۱) = − ۱۸ + ۱۱ = − ۷

جمع و تفریق عددهای صحیح (به روش ارزش مکانی) :

در این روش هر عدد را به همراه علامتش در جدول ارزش مکانی نوشته ، با تبدیل آن به یک عبارت ، حاصل را به دست می آوریم ؛   − ۱۵ + ۶۱ − ۳۸

دهگان	یکان
− ۱۰	− ۵
+ ۶۰	+ ۱
− ۳۰	− ۸
+ ۲۰	− ۱۲

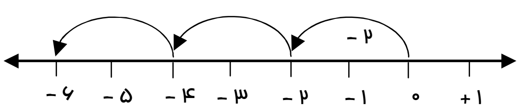
⟵ ۲۰ − ۱۲ = ۸

ضرب عددهای صحیح به کمک محور :

از دستور زیر می توان به سادگی به پاسخ رسید .

حاصل ضرب = تعداد بردارها × اندازهٔ یک بردار

(− ۲) × ۳ = − ۶



ضرب و تقسیم عددهای صحیح :

برای ضرب و تقسیم عددهای صحیح نیز باید دو گام زیر را به ترتیب انجام داد :

گام اول : تعیین علامت حاصل ؛ اگر علامت ها یک جور بود ، علامت حاصل مثبت **+** و اگر ناجور بود ، علامت حاصل منفی **−** خواهد شد .

گام دوم : بدست آوردن جواب ؛ پس از تعیین علامت ، عددها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم کنید .

(− ۱۸) ÷ (+ ۳) = − ۶

عبارت های ترکیبی :

در حل این عبارت ها ابتدا پرانتز (کروشه) را محاسبه و سپس با توجه به علامت بین عددها ، حاصل را به دست می آوریم .

اگر دریک عبارت ترکیبی پرانتز (کروشه) وجود نداشت ، طبق اولویت علامت ها از سمت چپ ؛ یعنی ضرب ، تقسیم ، جمع و تفریق را انجام دهید .

−۱۱ + ۹ × ۲ − ۵ − ۴ ÷ (− ۲) = ۷ − ۵ + ۲ = ۴

+ ۱۸   + ۲

حل مسایل به کمک عددهای صحیح :

گروه اول : اگر در مسئله ای اختلاف یا فاصله ، مانند سردتر ، گرمتر و . . . ، خواسته شد ، از دستور زیر استفاده کنید ؛

اختلاف = عدد بزرگتر - عدد کوچکتر

مثال : دمای هوای تهران **۲۸** درجه بالای صفر است. اردبیل **۸** درجه زیر صفر است . اختلاف دمای هوای دو شهر چند درجه است؟

(+ ۲۸) − (− ۸) = ۲۸ + ۸ = ۳۶

گروه دوم : اگر در مسئله ای میانگین عددها خواسته شد ، ابتدا عددها را با هم جمع و سپس حاصل را بر تعداد آنها تقسیم کنید .

مثال : دمای هوا در تبریز دو درجه زیر صفر و دمای اردبیل **۳** برابر آن است . میانگین دمای این دو شهر چند درجه است؟

(− ۲) × ۳ = − ۶

(− ۶) + (− ۲) = − ۶ − ۲ = − ۸

− ۸ ÷ ۲ = − ۴

گروه سوم : اگر در مسئله ای هیچ کدام از حالت های قبل وجود نداشت ، بین عددها علامت جمع قرار دهید.

مثال : دمای هوای شهرکرد **۳** درجه زیر صفر است. اردبیل **۸** درجه از شهرکرد سردتر است .دمای هوای شهر اردبیل چند درجه است؟

(− ۳) + (− ۸) = − ۱۱

فصل سوم جبر و معادله

الگو: به رابطه ای منظم بین تعداد بی شمار عدد یا شکل گفته می شود .

به منظور درک بهتر الگو ها آنها را گروه های زیر طبقه بندی کرده ایم .

۱ – الگو های عددی و جملهٔ n ام : در این الگوها با توجه به رابطه ای که بین اعداد وجود دارد ، می توان به جملهٔ **n** ام رسید .

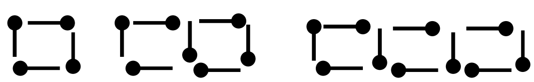
مثال : جملهٔ **n** ام الگوی عددی زیر را نوشته و جملهٔ بیستم آن را حساب کنید . **۱ , ۳ , ۵ , ...**

ملاحظه می شود تفاوت هر جمله با جملهٔ قبلش ۲ میباشد ، پس عدد ۲ در تمامی جمله ها ضرب شده که یک واحد از آنها کم شده است . یعنی جملهٔ **n** ام این الگو می شود ؛ **۲ n - ۱**

جملهٔ بیستم : **۲ (۲۰) – ۱ = ۴۰ – ۱ = ۳۹**

۲ – الگو های شکلی و جملهٔ n ام : در این الگوها با توجه به رابطه ای که بین شکل ها وجود دارد ، می توان به جملهٔ **n** ام و شکل مورد نظر رسید .

مثال : جملهٔ **n** ام الگوی زیر را یافته و بنویسید شکل دهم این الگو از چند چوب کبریت درست شده است؟



با دقت در شکل ها ملاحظه می شود تفاوت شکل دوم و اول **۳** چوب کبریت می باشد . همچنین تفاوت شکل سوم و دوم نیز ۳ چوب کبریت می باشد . در نتیجه جملهٔ n ام مضربی از عدد **۳** خواهد بود که یک واحد به آن اضافه شده است . پس جملهٔ **n** ام این الگو برابر است با : **۳ n + ۱**

تعداد چوب کبریت های شکل دهم نیز به این صورت محاسبه می شود :

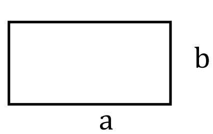
۳ (۱۰) + ۱ = ۳۱

۳ – جملهٔ عمومی مسئله ها : در این الگوها ابتدا هزینهٔ ثابت را نوشته و هزینهٔ دیگر را به عنوان ضریب **n** در نظر گرفته و به آن اضافه می کنیم .

مثال : یک شرکت حمل بار **۳۰۰۰۰** تومان در ابتدای قرداد و به ازای هر ساعت کار **۴۰۰۰** تومان دریافت میکند . برای n ساعت کار چقدر باید پول پرداخت ؟

۳۰۰۰۰ + ۴۰۰۰n

نوشتن دستور محاسبهٔ محیط و مساحت به صورت جبری : برای این کار باتوجه به دستور رسیدن به محیط و مساحت اشکال مختلف و حروفی که روی اضلاع آن شکل آمده ، عمل میکنیم .



۲ × (عرض + طول) = محیط مستطیل

P مستطیل = (a + b) × ۲

عرض × طول = مساحت مستطیل

S مستطیل = a × b

جملهٔ جبری : کوچکترین بخش از هر عبارت جبری را گویند که شامل دو بخش می باشد ؛

۱ – ضریب عددی : عددی است که در ابتدای هر جملهٔ جبری قرار گرفته است .

۲ – بخش حرفی : حرف یا حروفی است که بعد از ضریب قرار می گیرند .

ضریب عددی

−۴ xy

بخش حرفی

❊ برای جلوگیری از اشتباه شدن علامت ضرب با حرف x در یک عبارت جبری ، به جای علامت × از نقطه یا پرانتز و یا از قرار دادن این علامت بطور کلی صرف نظر می کنند . مانند :

$۳ \times a \times b = ۳ \cdot a \cdot b = ۳(a \cdot b) = ۳ab$

❊ از نوشتن ضریب **۱** می توان صرف نظر کرد

$۱ \times a \times b = ab$

❊ اعداد به تنهایی و بدون حرف ، خود یک جمله ای جبری به حساب می آیند .

چند جمله ای : از کنار هم قرار گرفتن چند یک جمله ای که با علامت های جمع یا تفریق از هم جدا شده اند ، به وجود می آید . مانند :

$۸ + x \rightarrow$ دو جمله ای

$-b - ۸ + ۷xy + ۲a \rightarrow$ چهار جمله ای

جمله های متشابه : عبارت های جبری هستند که بخش حرفی آنها مثل هم بوده و تفاوت آن ها در ضرایب عددی آنهاست . مانند :

$-۴x \;,\; \frac{۱}{۲}x \;,\; ۹x \;,\; \ldots$

جمع و تفریق در عبارت های جبری : برای این کار فقط می توان جمله های متشابه را با هم جمع یا از هم کم کرد . مانند :

$-۴x + ۵x - ۲x = (-۴ + ۵ - ۲)x = -۱x = -x$

ساده کردن عبارت های جبری : برای ساده کردن یک عبارت جبری ، ابتدا عملیاتی که بین جمله ها وجود دارند را انجام داده ، سپس جمله های متشابه را با هم جمع یا از هم کم می کنیم .

❊ اگر هنگام ساده کردن یک عبارت جبری ، جمله ای متشابه نداشت ، آن جمله را بدون تغییر در مراحل بعد می نویسیم .

ضرب عدد در عبارت جبری :

ضرب عدد در یک جمله ای : عدد در ضریب یک جمله ای ضرب می شود . مانند: $-۲ \times (۳x) = -۶x$

ضرب عدد در چند جمله ای : عدد درتک تک ضرایب یک جمله ای ها ضرب می شود . مانند :

$-۲ \times (-۳x + ۵y) = ۶x - ۱۰y$

ضرب یک جمله ای در چند جمله ای : ابتدا علامت ها ،

بعد ضرایب عددی و سپس حروف در هم ضرب خواهند شد . مانند :

$۲a \times (-۳x + ۷y) = -۶ax + ۱۴ay$

مقدار عددی عبارت جبری : برای تعیین این مقدار ، به جای حروف موجود در عبارت ، اعداد داده شده را می نویسیم . مانند :

مقدار عددی عبارت ؛ $m(-۳m + ۱)$ را به ازای $m = -۲$ به دست آورید .

$(-۲) \times [-۳ \times (-۲) + ۱] = -۲ \times ۷ = -۱۴$

معادله: به یک تساوی جبری که به ازای بعضی از عددها به تساوی عددی تبدیل می شود، **معادله** می گویند.

مراحل حل معادله :

گام اول : معلوم ، مجهول کردن ؛ یعنی هر چه متغیر یا مجهول داریم را به یک طرف تساوی و هرچه عدد داریم به طرف دیگر تساوی انتقال دهید . البته توجه داشته باشید در این نقل و انتقال تمام آنچه که منتقل شده اند باید **قرینه** (علامت آنها عوض) شود .

گام دوم : ساده کردن طرفین تساوی ؛ پس از انجام انتقال ، دو طرف تساوی را به ساده ترین صورت در آورید . یعنی اگر جمع یا تفریقی در هر طرف تساوی وجود داشت ، آنها را انجام دهید .

گام آخر : رسیدن به جواب ؛ جمع عددها را مجموع ضرایب تقسیم کنید .

مثال : جواب معادلهٔ زیر را به دست آورید .

$$۴ - ۳x = -۸x - ۶$$

$$-۳x + ۸x = -۶ - ۴ \quad \text{گام اول}$$

$$۵x = -۱۰ \quad \text{گام دوم}$$

$$x = -\frac{۱۰}{۵} \quad \text{گام آخر}$$

$$x = -۲ \quad \text{جواب معادله}$$

امتحان جواب معادله : برای امتحان درست بودن حل یک معادله ، باید جواب (جوابهای) به دست آمده را در صورت معادله به جای مجهول قرار دهید . اگر دو طرف تساوی یک اندازه شد ، جواب صحیح و معادله درست حل شده است .

حل مسائل به کمک معادله : با تبدیل صورت بسیاری از مسائل به معادله ، می توان با سرعت و دقت به جواب رسید . برای این کار ابتدا خواستهٔ مسئله را با x مشخص کرده و سپس اطلاعات مسئله را به علائم ریاضی تبدیل کنید . به مثال ها توجه نمایید :

مثال ۱ : از دو برابر عددی پنج واحد کم کردیم ، حاصل منفی هفت شد . عدد چیست ؟

عدد مورد نظر را **x** فرض میکنیم . پس داریم :

عدد مورد نظر = مقدار کم شده - (عدد × ۲)

$$(۲ \times x) - ۵ = -۷$$

$$۲x - ۵ = -۷$$

$$۲x = -۷ + ۵ = -۲$$

$$x = -۲ \div ۲$$

$$x = -۱$$

مثال ۲ : حاصل جمع سه عدد صحیح متوالی **۳۳-** می باشد . آن سه عدد کدامند ؟

با توجه به این که سه عدد متوالی هستند ، پس داریم:

عدد مورد نظر $= x$

عدد کوچک تر $= (x - ۱)$

عدد بزرگ تر $= (x + ۱)$

$$(x - ۱) + x + (x + ۱) = -۳۳$$

$$۳x = -۳۳$$

$$x = -۳۳ \div ۳$$

$$x = -۱۱ \quad \text{عدد مورد نظر}$$

$$(x + ۱) = -۱۱ + ۱ = -۱۰ \quad \text{عدد بزرگتر}$$

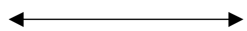
$$(x - ۱) = -۱۱ - ۱ = -۱۲ \quad \text{عدد کوچکتر}$$

فصل چهارم هندسه و استدلال

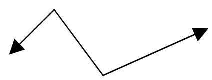
خط : از کنار هم قرار گرفتن بی شمار نقطه در کنار هم به وجود می آید .

انواع خط :

۱ – خط راست :



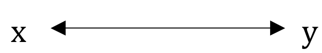
۲ – خط شکسته :



۳ – خط خمیده (منحنی) :

نام گذاری نقطه و خط :

در ریاضیات برای نام گذاری شکل ها از حروف انگلیسی استفاده می کنیم . به طور معمول **نقطه** را با حروف بزرگ انگلیسی نام گذاری می کنیم و برای نام گذاری امتداد **خط** که در شکل با فلش نشان می دهیم از حروف کوچک استفاده می کنیم. مانند :



❊ از یک نقطه بی شمار خط می گذرد .
❊ از دو نقطه فقط یک خط راست می گذرد .
❊ از دو نقطه بی شمار خط خمیده و شکسته می گذرد .

پاره خط :

قسمتی از یک خط که با دو نقطه جدا شده باشد .

طول یا اندازهٔ پاره خط :

طول یک پاره خط را با قراردادن یک پاره خط کوچک در بالای نام آن نمایش می دهیم. برای مثال $\overline{AB}$ یعنی طول پاره خط AB و آن فاصلهٔ بین دو سر پاره خط میباشد که با واحدی به نام سانتیمتر (cm) اندازه گیری می شود .

تعداد **تمام پاره خط های** روی یک خط از این دستور محاسبه می شود $\dfrac{n(n-۱)}{۲}$

در این فرمول n تعداد نقطه ها می باشد .

نیم خط :

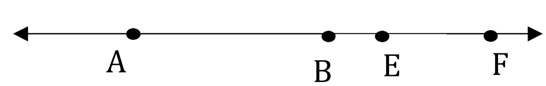
قسمتی از یک خط که از یک طرف با یک نقطه جدا شده باشد . نیم خط را ابتدا با نام نقطه و سپس نام خط نام گذاری و می خوانند . مانند نیم خط **Ax**

تعداد **تمام نیمخط های** روی یک خط از دستور $۲n$ به دست می آید که در آن n تعداد نقطه ها می باشد.

مقایسهٔ پاره خط ها :

پاره خط ها را با توجه به طول آنها با هم مقایسه میکنیم.

مثلا پاره خط AB بزرگتر از پاره خط EF میباشد . این موضوع را به صورت ریاضی چنین مینویسیم .



$\overline{AB} > \overline{EF}$

جمع و تفریق پاره خط ها :

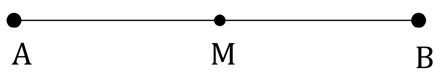
در جمع پاره خط ها به دنبال هم و در تفریق ، آنها را روی هم قرار میدهیم . مانند :

در شکل نقاط A ، B و C روی یک خط قرار دارند. داریم :

نسبت بین پاره خط ها :

با توجه به طول پاره خط ها می توان بین آنها نسبتهای مختلفی به دست آورد . مانند :

در شکل M وسط پاره خط AB است.



$$\overline{AB} = ۲\ \overline{MB}$$

$$\overline{AM} = \frac{۱}{۲}\ \overline{AB}$$

روابط بین پاره خط ها :

با شناخت رابطهٔ بین چند پاره خط ها ، می توان به رابطه های دیگری رسید . مانند :

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} = \overline{CD}\\ \overline{AB} > \overline{EF}\end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{CD} > \overline{EF}$$

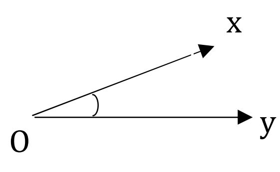
زاویه :

دو نیم خط با رأس مشترک ، زاویه ایجاد می کنند .

نام گذاری زاویه :

۱ - با حرف رأس ؛ یک حرف بزرگ انگلیسی

۲ - با حرف رأس و دو نیم خط ؛ سه حرف انگلیسی که حرف وسط (همان رأس) حرف بزرگ و حروف کناری (نیم خط ها) حرف کوچک استفاده میشود .مانند :

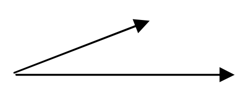


$x\hat{O}y$ سه حرف

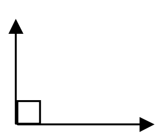
$\hat{O}$ یک حرف

انواع زاویه :

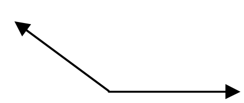
زاویهٔ تند یا حادّه



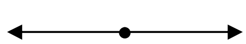
زاویهٔ راست یا قائمه



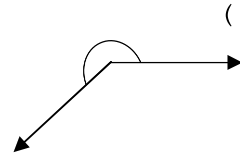
زاویهٔ باز یا منفرجه



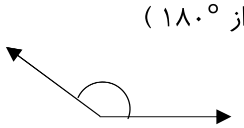
زاویهٔ نیم صفحه یا تخت



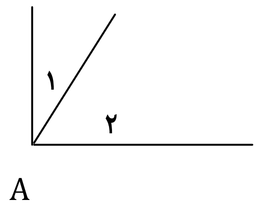
زاویهٔ مقعر یا کاو (از °۱۸۰ تا °۳۶۰)



زاویهٔ محدب یا کوژ (کمتر از °۱۸۰)



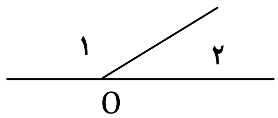
زاویه های متمم :



دو زاویه (خواه کنار هم ، خواه جدا از هم) که مجموع آنها 90° شود .

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ$$

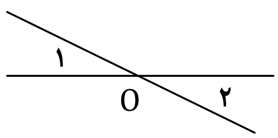
زاویه های مکمل :



دو زاویه (خواه کنار هم ، خواه جدا از هم) که مجموع آنها 180° شود .

$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^\circ$$

زاویه های متقابل به رأس :



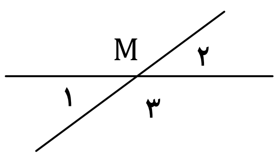
دو زاویه که در رأس مشترک و اضلاع آنها در امتداد هم باشند .

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

❊ دو زاویهٔ متقابل به رأس همیشه با هم مساویند .

روابط بین زاویه ها :

با شناخت رابطهٔ بین چند زاویه ، می توان به رابطه های دیگری رسید . مانند :



$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}_1 + \hat{M}_3 = 180^\circ \\ \hat{M}_3 + \hat{M}_2 = 180^\circ\end{array}\right\} \Longrightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

چند ضلعی ها :

مثلث :

در هر مثلث ، مجموع زاویه ها برابر 180° است.

مثلث ها را با توجه به اندازهٔ زاویه هایشان به **سه** دسته تقسیم می کنیم :

❊ مثلث هایی که هر سه زاویهٔ آنها تند است.

❊ مثلث هایی که یک زاویهٔ راست دارند.

❊ مثلث هایی که یک زاویهٔ باز دارند.

❊ یک مثلث را وقتی نمی توان کشید که اندازهٔ هرضلع آن مساوی یا بزرگتر از جمع دو ضلع دیگرش باشد .

جمع دو ضلع دیگر $>$ اندازهٔ هرضلع

❊ مثلث مختلف الاضلاع را می توان (با سه زاویه تند)، (با یک زاویه قائمه و دو زاویه تند) و (با یک زاویه باز و دو زاویه تند) رسم کرد.

❊ مثلث متساوی الساقین را می توان (با سه زاویه تند)، (با یک زاویه قائمه و دو زاویه تند) و (با یک زاویه باز و دو زاویه تند) رسم کرد.

❊ مثلث متساوی الاضلاع را فقط با سه زاویه تند (60°) می توان رسم کرد.

❊ چند ضلعی هایی که هیچ زاویۀ بزرگتر از ۱۸۰° ندارند ، **محدّب** یا **کوژ** نامیده می شوند.

❊ به چند ضلعی ای که دست کم یک زاویۀ بزرگتر از ۱۸۰° داشته باشد ، چند ضلعی **مقعر** یا **کاو** می گویند.

❊ به چندضلعی هایی که همۀ ضلع ها و زاویه هایشان با هم مساوی است ، **چند ضلعی منتظم** گفته میشود.

مانند مثلث متساوی الاضلاع ، مربع و . . .

❊ مجموع زاویه های هر n ضلعی برابر است با :

$$(n - ۲) \times ۱۸۰ \qquad (n \text{ تعداد اضلاع است})$$

❊ اندازۀ هر زاویه هر n ضلعی برابر است با :

$$\frac{۱۸۰ \times (n - ۲)}{n}$$

❊ تعداد قطرهای هر n ضلعی برابر است با :

$$\frac{n \times (n - ۳)}{۲}$$

زاویه بین عقربه های ساعت :

زاویه بین عقربه های ساعت شمار و دقیقه شمار در ساعت h و دقیقه m از رابطه زیر به دست می آید.

$$\widehat{A} = \left| ۳۰\, h - \frac{۱۱}{۲}\, m \right|$$

تبدیلات هندسی (انتقال ، تقارن ، دوران) :

اگر شکل را بدون تغییر جهت روی صفحه حرکت دهید تا تصویر آن جابجا گردد ، بدین ترتیب شکل را روی صفحه **انتقال** داده اید.

وقتی قرینۀ شکلی را نسبت به یک خط(خط تقارن) پیدا می کنیم ، تصویر به دست آمده مساوی آن شکل است ؛ **امّا جهت آن تغییر** می کند.

مرکز دوران ، نقطه ای است که شکل حول آن گردش (یا دوران) می کند .

در مرکز دوران ۱۸۰° شکل به اندازۀ یک زایۀ نیم صفحه (۱۸۰°) گردش خواهد داشت .

در مرکز دوران ۹۰° شکل به اندازۀ یک زایۀ قائمه (۹۰°) گردش می کند . این گردش به دوصورت امکان پذیر است . خلاف عقربه های ساعت ، که گردش ۹۰° به سمت راست و در جهت عقربه های ساعت ، که گردش ۹۰° به سمت چپ شکل اولیۀ صورت میگیرد .

شکل های مساوی (هم نهشت) : اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل(انتقال ، تقارن یا دوران) در صفحه بر شکل دیگر منطبق کنیم ، می گوییم این دو شکل باهم **هم نهشت** (مساوی) اند. این تبدیل ها به وسیلۀ $\longrightarrow$ مشخص می گردد که نوع تبدیل بالای فلش نوشته می شود .

فصل پنجم شمارنده ها و اعداد اول

شمارنده ها (مقسوم علیه های) یک عدد :

در ریاضیّات اگر عددی طبیعی مانند a بر عددی طبیعی مانند b بخش پذیر باشد ، b را **شمارنده** یا مقسوم علیه a گویند . به بیان دیگر باقیماندهٔ a بر b برابر صفر میشود . مانند : **۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۶ و ۱۲** که همگی شمارنده های عدد **۱۲** می باشند .

۱۲ , ۶ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱ : شمارنده های ۱۲

عدد اول :

اعداد طبیعی هستند که فقط دو شمارنده دارند . یکی عدد **۱** و دیگری خود عدد . مانند :

۱۱ , ۱ : شمارنده های ۱۱ ، ۲ , ۱ : شمارنده های ۲

٭ عدد **۱** نه اول است و نه غیر اول (مرکب)

شمارنده های اول :

به شمارنده هایی که عدد اول باشند **شمارنده های اول** گفته می شود .

برای رسیدن به شمارنده های اول می توان از روشهای زیر استفاده کرد :

۱ – نوشتن تمامی شمارنده های عدد مورد نظر و مشخص کردن شمارنده های اول آن .

۲ - استفاده از نمودار درختی یا تجزیه کردن (نوشتن عدد به صورت ضرب عامل های اول) .

۳ - استفاده از قواعد بخش پذیری اعداد اول .

٭ بخش پذیری بر **۲** : یکان عدد زوج باشد .

٭ بخش پذیری بر **۳** : جمع رقمها مضرب **۳** باشد .

٭ بخش پذیری بر **۴** : دو برابر دهگان را با یکان جمع می کنیم و باقیمانده ی تقسیم عدد حاصل بر **۴** را به دست می آوریم . اگر باقیمانده صفر شد ، عدد بر **۴** بخش پذیر است .

۲۵۴ → ۲ × ۵ = ۱۰ + ۴ = ۱۴

٭ بخش پذیری بر **۵** : یکان ۰ یا **۵** باشد .

٭ بخش پذیری بر **۶** : اعداد زوجی که بر **۳** بخش پذیرند بر **۶** هم بخش پذیرند . در واقع اگر عددی هم بر **۲** و هم بر **۳** بخش پذیر باشد بر **۶** هم بخش پذیر است .

نکته ۱) حاصلضرب سه عدد متوالی بر **۶** بخش پذیر است .

۲ × ۳ × ۴ = ۲۴ (۴ و ۳ و ۲)

۳ × ۴ × ۵ = ۶۰ (۵ و ۴ و ۳)

نکته ۲) حاصلضرب دو عدد فرد یک عدد فرد است . **۳ × ۵ = ۱۵**

حاصلضرب دو عدد زوج یک عدد زوج است . **۲ × ۸ = ۱۶**

حاصلضرب یک عدد زوج در یک عدد فرد ، یک عدد زوج است . **۳ × ۴ = ۱۲**

٭ بخش پذیری بر **۷** : پنج برابر یکان + بقیهٔ رقمها مضرب **۷** باشد . مانند :

۲۳۱ → (۱ × ۵) + ۲۳ = ۲۸ → ۲۸ = ۷ × ۴

٭ بخش پذیری بر **۹** : جمع رقمها مضرب ۹ باشد .

❊ بخش پذیری بر **۱۱** :

- دو رقمی : ارقام تکراری . مانند : **۷۷** یا **۴۴**
- سه رقمی : رقم وسط برابر جمع دو رقم کناری شود.

مانند : **۱۷۶** یا **۳۵۲** و . . .

- چند رقمی : رقمهای عدد مورد نظر را یکی در میان جمع می کنیم .

حاصل جمع دو گروه را از هم کم میکنیم .

اگر این حاصل ۰ یا مضرب **۱۱** شد ، بر **۱۱** بخش پذیر می باشد .

۴۱۳۶ ⟵ **۴ + ۳ = ۷** ، **۱ + ۶ = ۷** } **۷ - ۷ = ۰**

❊ بخش پذیری بر **۱۳** : چهار برابر یکان + بقیهٔ رقمها مضرب **۱۳** باشد . مانند :

۶۵ → (۵ × ۴) + ۶ = ۲۶ → ۲۶ = ۱۳ × ۲

بزرگ ترین شمارنده مشترک (ب . م . م) :

شمارنده های یک عدد را مقسوم علیه های آن نیز می گویند؛ بنابراین بزرگ ترین شمارندهٔ مشترک دو عدد همان بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک است که به اختصار آن را **ب.م.م** می نویسند.

ب.م . م دو عدد را به صورت (و) نشان می دهند.

کوچک ترین مضرب مشترک (ک . م . م) :

کوچک ترین مضرب مشترک دو عدد ، اولین مضرب مشترک آن دو عدد است . کوچک ترین مضرب مشترک دو عدد را به طور اختصار **ک . م . م** میگویند و به صورت [و] نمایش می دهند.

دستور برای یافتن ب . م . م و ک . م . م :

پس از تجزیهٔ عددها به شمارنده های اول آنها ، از دستورهای زیر برای یافتن ب . م . م و ک . م . م استفاده نمایید :

ب . م . م (و)

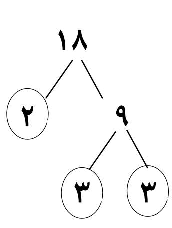
شمارنده های مشترک با کمترین تکرار

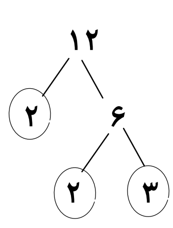
ک . م . م [و]

شمارنده های غیرمشترک × شمارنده های مشترک با بیشترین تکرار

نمودار درختی :

هرگاه عددی طبیعی را به صورت ضرب دو عدد غیر از **۱** به دوشاخه در آوریم (بهتر است این ضرب از یک عدد اول و یک عدد غیر اول تشکیل شود) و این کار را ادامه دهیم به شمارنده های اول آن عدد خواهیم رسید . مانند :





= [۱۲ و ۱۸]

۱۸ = ۲ × ۳ × ۳

۱۲ = ۲ × ۲ × ۳

(۱۲ و ۱۸) = ۲ × ۳

[۱۲ و ۱۸] = ۲ × ۲ × ۳ × ۳

ساده کردن کسرها :

از مهم ترین کاربرد شمارنده های اول ، ساده کردن کسرها می باشد . برای این منظور صورت و مخرج کسر را به شمارنده های اول آن تجزیه و سپس شمارنده های مشترک در صورت و مخرج را حذف می کنیم . مانند:

$$\frac{۴۲}{۴۸} = \frac{\cancel{۲} \times \cancel{۳} \times ۷}{\cancel{۲} \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times \cancel{۳}} = \frac{۷}{۸}$$

هم مخرج کردن کسرها :

یکی از مهم ترین کاربردهای ک.م.م در پیدا کردن مخرج مشترک دو کسر است ، یعنی کوچک ترین عددی را پیدا می کنیم که به هر دو مخرج بخش پذیر(قابل قسمت) باشد . مانند :

$$\frac{۱۵}{۱۲} - \frac{۷}{۱۸} =$$

$$۱۸ = ۲ \times ۳ \times ۳$$

$$۱۲ = ۲ \times ۲ \times ۳$$

(۱۲ و ۱۸) = ۲ × ۳

[۱۲ و ۱۸] = ۲ × ۲ × ۳ × ۳ = ۳۶

$$\frac{۱۵}{۱۲} - \frac{۷}{۱۸} = \frac{۴۵}{۳۶} - \frac{۱۴}{۳۶} = \frac{۳۱}{۳۶}$$

چند نکته :

❊ ب . م . م هر عدد با **۱** ، **۱** می شود .   **۱ = (۱ و ۹)**

❊ ک . م . م هر عدد با **۱** ، خود عدد می شود .   **۱۲ = [۱۲ و ۱]**

❊ ب . م . م هر عدد با خودش ، همان عدد می شود   **۱۵ = (۱۵ و ۱۵)**

❊ ک . م . م هر عدد با خودش ، خود همان عدد می شود .   **۷ = [۷ و ۷]**

❊ ب . م . م دو عدد اول ، **۱** می شود .   **۱ = (۱۱ و ۵)**

❊ ک . م . م دو عدد اول ، حاصلضرب آنها می شود.   **۹۱ = [۱۳ و ۷]**

❊ ب . م . م دو عدد بخش پذیر، عدد کوچکتر میشود.   **۷ = (۳۵ و ۷)**

❊ ک . م . م دو عدد بخش پذیر، عدد بزرگتر میشود.   **۳۶ = [۱۲ و ۳۶]**

❊ ب . م . م دو عدد متوالی ، **۱** می شود .   **۱ = (۱۹ و ۱۸)**   **۱ = (۶ و ۵)**

❊ ک . م . م دو عدد متوالی ، حاصلضرب آنها میشود.   **۷۲ = [۹ و ۸]**

فصل ششم سطح و حجم

حجم : مقدار جایی که هر جسم در فضا اشغال می کند .

انواع حجم : حجم ها را می توان به دو دستهٔ **هندسی** و **غیرهندسی** تقسیم کرد . حجم های هندسی شکل های مشخص و تعریف دارند.

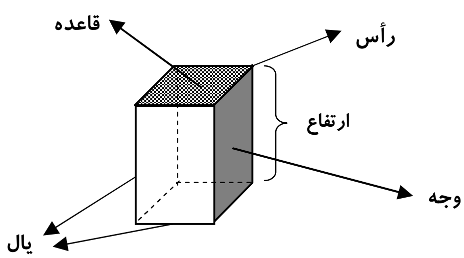
حجم های هندسی را می توان به سه دسته تقسیم کرد . **منشوری** ، **کروی** و **هرمی** .

برخی از حجم های هندسی نیز ترکیبی از این سه نوع اند.

آشنایی بیشتر با حجم های منشوری :

حجم های منشوری بین دو صفحه موازی قرار میگیرند. به این دو سطح موازی که سطح منشوری را قطع می کنند، **قاعده** و به سطح های اطراف آن **وجه های جانبی** می گویند .

به محل برخورد سطح ها **یال** و به نقطهٔ برخورد هر سه سطح **رأس** می گویند.



قاعده : دو سطح بالا و پایین منشور .

وجه یا پهلو : سطح های اطراف منشور .

یال : محل برخورد هر دو وجه .

رأس : محل برخورد یال ها .

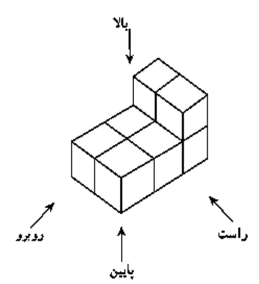
ارتفاع : فاصلهٔ بین دو قاعده .

تعداد وجه ها یا پهلو ها در حجم های منشوری :

۲ + تعداد ضلهای قاعده = تعداد وجه ها

تعداد یال ها در حجم های منشوری :

۳ × تعداد ضلهای قاعده = تعداد یال ها

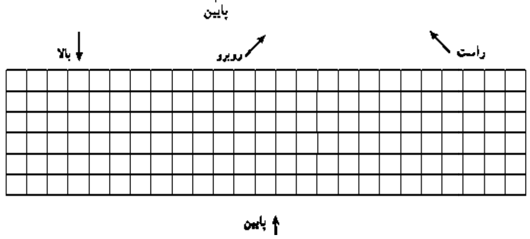


مقطع زدن :

برش زدن حجم های منشوری از ارتفاع آنها

جهت های دیدن یک حجم :

یک حجم را می توان از چهار جهت ؛ بالا ، روبرو ، راست و پایین مشاهده و آن را روی کاغذشطرنجی رسم کرد. مانند :



محاسبهٔ حجم منشورها :

تمام حجم های منشورها را می توانید از دستور زیر محاسبه کنید :

ارتفاع × مساحت قاعده = حجم منشور

رابطهٔ جبری آن : $V = s . h$

❊ استوانه هم از حجم های منشوری حساب می شود که دارای قاعدهٔ دایره شکل می باشد .

❊ واحدهای اندازه گیری حجم عبارتند از سانتیمتر مکعب و یا مترمکعب .

مساحت جانبی و کل :

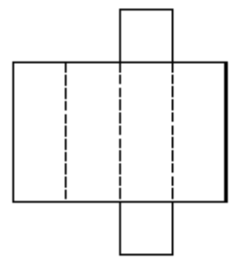
به مجموع مساحت همهٔ وجه های جانبی منشور مساحت جانبی آن می گویند. برای یافتن مساحت جانبی تمام منشورها می توانید از دستور زیر آن را محاسبه نمایید :

ارتفاع × محیط قاعده = مساحت جانبی

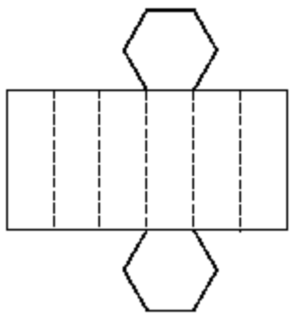
رابطهٔ جبری آن : $S_{\text{جانبی}} = P \, . \, h$

قبل از رسیدن به مساحت کل ، در بارهٔ گسترده یا همان پهن شدهٔ حجم های منشوری شناخت بیشتری بیابیم . در زیر گستردهٔ بعضی از این احجام را ملاحظه مینمایید.

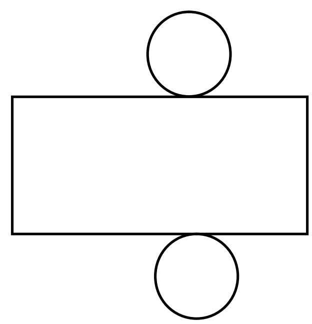
گستردهٔ منشور چهار پهلو



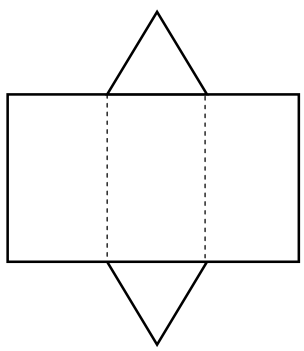
گسستردهٔ منشور شش پهلو



گستردهٔ استوانه



گسستردهٔ منشور سه پهلو



مساحت کل :

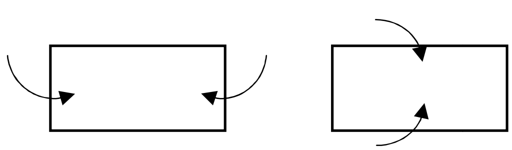
به مجموع مساحت جانبی و مساحت دو قاعدهٔ تمامی منشورها ، مساحت کل آن میگویند. برای یافتن مساحت کل تمام منشورها می توانید از دستور زیر آن را محاسبه نمایید :

مساحت دو قاعده + مساحت جانبی = مساحت کل

رابطهٔ جبری آن : $S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + S_{\text{دو قاعده}}$

حجم و سطح :

یک مستطیل با طول و عرض مشخص را به دو صورت زیر لوله می کنیم تا استوانه به دست آید.



در هر حالت حجم استوانه ها را که به دست آوریم ، مشاهده می کنیم این دو حجم با هم متفاوتند و این در حالی است که هر دو حجم از مستطیلی یک اندازه حاصل شده اند .

پس می توان نتیجه گرفت با حرکت یک سطح در فضا ، حجم ساخته می شود که احجام حاصل با هم متفاوتند .

از این خاصیت در خرّاطی ، تراشکاری و سفالگری برای ساختن حجم های مختلف استفاده می کنند.

فصل هفتم توان و جذر

تعریف توان :

عبارتی مانند ؛ **۲ × ۲ × ۲ × ۲ × ۲** را در ریاضیات برای ساده تر شدن به صورت $۲^۵$ می نویسیم و آن را چنین می خوانیم **۲** به توان **۵ .**

در عبارت $۲^۵$ ، **۲** را **پایه** و **۵** را **توان** می نامیم .درست شبیه همان کاری که در ساده کردن و خلاصه کردن جمع انجام می دادیم.

(۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ = ۵ ×۲)

❊ از توان به منظور مختصر نویسی ضرب های تکراری یک عدد استفاده می کنند .

❊ به توان ، **نما** و **قوّه** هم گفته می شود .

❊ هر عدد به توان یک برابر خودش می شود : $a^{۱} = a$

❊ عدد یک به توان هر عددی برابر یک می شود : $۱^{۵۲} = ۱$

❊ هر عدد به توان صفر ، ۱ می شود . $۱۲^{۰} = ۱$

❊ عدد صفر به توان هر عددی برابر صفر می شود . $۰^{۱۵} = ۰$

❊ صفر به توان صفر تعریف نشده است . $۰^{۰} =$ ***تعریف نشده***

نقش پرانتز در اعداد توان دار :

- اگر عددی منفی داخل پرانتز به توان زوج رسید ، حاصل عددی مثبت می شود .

$$(-۳)^{۲} = (-۳) \times (-۳) = +۹$$

- اگر توان عددی منفی داخل پرانتز بود ، پرانتز در توان رساندن عدد نقشی ندارد .

$$(-۳^{۲}) = -(۳ \times ۳) = -۹$$

- اگر عددی منفی بدون پرانتز به توان برسد ، حاصل عددی منفی می شود .

$$-۴^{۲} = -(۴ \times ۴) = -۱۶$$

- اگر یک کسر داخل پرانتز به توان برسد ، توان شامل صورت و مخرج هر دو می شود .

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳} = \frac{۱ \times ۱ \times ۱}{۲ \times ۲ \times ۲} = \frac{۱}{۸}$$

- اگر کسری داخل پرانتز به توان گرفت ، یا توان در صورت یا مخرج کسر باشد ، پرانتز هیچ نقشی در توان ندارد .

$$\left(\frac{۲^{۳}}{۵}\right) = \frac{۲ \times ۲ \times ۲}{۵} = \frac{۸}{۵}$$

$$\frac{۷}{۳^{۲}} = \frac{۷}{۳ \times ۳} = \frac{۷}{۹}$$

- اگر یک عبارت جبری داخل پرانتز به توان برسد ، توان شامل تک تک جمله های عبارت می شود .

$$(۲ab)^{۲} = ۲^{۲}a^{۲}b^{۲} = ۴a^{۲}b^{۲}$$

- اگر جمله ای از یک عبارت جبری توان نداشت ، توانش **۱** می باشد .

$$۵a^{۲}bx^{۸} = ۵a^{۲}b^{۱}x^{۸}$$

محاسبهٔ عبارت توان دار :

با توجه به درس توان ، ترتیب انجام دادن عملیات مختلف ریاضی به صورت

۱) پرانتز ۲) توان ۳) ضرب و تقسیم ۴) جمع و تفریق ، انجام می شود.

$$\frac{۴^{۳} \times ۴ + ۹ - ۶}{۵^{۲} + ۲^{۳}} =$$

گستردهٔ توانی یک عدد :

در نوشتن گستردهٔ توانی هر عدد ، ارزش مکانی رقمهای

را به صورت توانی از ۱۰ می نویسیم .

$$۵۰۶۲ = ۵۰۰۰ + ۶۰ + ۲$$
$$= ۵ \times ۱۰^{۳} + ۰ \times ۱۰^{۲} + ۶ \times ۱۰^{۱} + ۲ \times ۱۰^{۰}$$

ساده کردن عبارت های توان دار :

۱ - در ضرب عددهای توان دار با پایه های مساوی ، یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را جمع می کنیم .

$$(-۳)^{۲} \times (-۳)^{۴} = (-۳)^{۶}$$

۲ - در ضرب عددهای توان دار با توان های مساوی ، پایه ها را در هم ضرب و یکی از توان ها را می نویسیم.

$$۵^{۴} \times (-۳)^{۴} = (-۱۵)^{۴}$$

۳ - اگر ظاهر پایه ها مثل هم نبود ، مثلاً یکی عدد و دیگری کسر بود ، سعی میکنیم آنها به یک شکل تبدیل کنیم

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳} \times (۰/۵)^{۶} =$$

داریم : $(۰/۵) = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$

درنتیجه : $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳} \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۶} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۹}$

۴ - یک عدد توان دار را در صورت نیاز می توان به صورت ضرب دو یا چند عدد توان دار تبدیل کرد .

$۳^{۷} = ۳^{۲} \times ۳ \times ۳^{۴}$ و یا $۱۵^{۴} = ۳^{۴} \times ۵^{۴}$

این خواص کمک به حل بسیاری از سوالات اعداد توان دار می نماید .

الف - اگر $۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$ باشد ، حاصل $۲^{۱۲}$ را به دست آورید .

$$۲^{۱۲} = ۲^{۱۰} \times ۲^{۲} = ۱۰۲۴ \times ۴ = ۴۰۹۶$$

ب - باز شدهٔ عدد توان دار زیر را بنویسید :

$$۱۲^{۷} = (۲ \times ۶)^{۷} = ۲^{۷} \times ۶^{۷}$$

ج - ساده کردن عبارت های توان دار :

$$\underbrace{۵^{۲} \times ۵^{۷}}_{\text{ضرب پایه های مساوی}} \times ۷^{۹} = \underbrace{۵^{۹} \times ۷^{۹}}_{\text{ضرب توان های مساوی}} = ۳۵^{۹}$$

د - پیش بینی ارقام یک عدد توان دار :

اگر $۴^{۵} = ۱۰۲۴$ باشد ، عدد $۴^{۱۰}$ چند رقمی است ؟ $۴^{۱۰} = ۴^{۵} \times ۴^{۵}$

اگر $۴^{۵}$ را ۱۰۰۰ فرض کنیم ، پس داریم : $۱۰۰۰ \times ۱۰۰۰ = ۱۰۰۰\,۰۰۰$

در نتیجه $۴^{۱۰}$ ؛ هفت رقمی خواهد بود .

هـ - استثنای تفریق اعداد توان دار :

$$۱۰^{۲} - ۶^{۲} = ۴^{۳}$$

$$۲۱^{۲} - ۱۵^{۲} = ۶^{۳}$$

و - استثنای جمع اعداد توان دار :

$$۳^{۹} + ۳^{۹} + ۳^{۹} = ۳^{۹} \times ۳ = ۳^{۱۰}$$

ز - محاسبهٔ عبارت توان دار به کمک مقدار داده شده:

اگر $۲^{a} = ۷$ باشد ، مقدار $۲^{a+۱}$ را بدست آورید .

$$۲^{a+۱} = ۲^{a} \times ۲^{۱} = ۷ \times ۲ = ۱۴$$

جذر یا ریشهٔ دوم :

هر گاه عددی در خودش ضرب شود ، این حاصل را **مجذور** و به عددی که در خوش ضرب شده **جذر** میگوییم .

❊ هر عدد مثبت دارای دو ریشه ، یکی مثبت و دیگری منفی می باشد . مانند عدد **۲۵** که دو ریشهٔ **۵+** و **۵−** را دارد .

❊ به ریشهٔ دوم مثبت هر عدد **جذر** آن عدد گفته میشود.

❊ علامت جذر $\sqrt{\ }$ است .

❊ جذر هر عدد ، برابر است با دو عدد که قرینهٔ یکدیگرند

❊ به جذر یک عدد ، ریشهٔ دوم آن نیز گفته میشود .

❊ اعداد منفی جذر ندارند . زیرا حاصل ضرب هیچ عددی در خوش ، منفی نمی شود .

❊ عدد صفر تنها یک ریشه داردکه آن خود عدد صفر است .

انواع جذر :

جذر کامل :

❊ اعدادطبیعی که جذر کامل دارند ؛ یعنی جذر آنها یک عدد طبیعی می شود را مجذور کامل گویند ،

مانند ؛ **۱** ، **۴** ، **۹** ، **۱۶** ، **۲۵** و . . . . برای رسیدن به جذر کامل از خود سوال کنید چه عددی در خوش ضرب شده که عدد زیر رادیکال را تشکیل داده است ؟ مانند : $\sqrt{۴۹} = ۷$

جذر تقریبی :

❊ جذرهایی که یک عدد اعشاری شوند .

برای رسیدن به جذر تقریبی یک عدد ابتدا باید معلوم کنید که عدد زیر رایکال شما بین کدام دو عدد صحیح قرار گرفته است .
مانند $\sqrt{۱۸}$ که بین دو رایکال $\sqrt{۱۶}$ و $\sqrt{۲۵}$ قرار گرفته یعنی : $\sqrt{۲۵} > \sqrt{۱۸} > \sqrt{۱۶}$ پس $\sqrt{۱۸}$ بین دو عدد **۴** و **۵** قرار گرفته است .

این فاصله را نصف کرده به توان **۲** برسانید .

بسیار مهم :

ضمناً می توانید اگر به عدد کوچکتر نزدیک بود ؛ **۰/۱** ، **۰/۱** ، **۰/۱** به عدد کوچکتر اضافه کنید تا به حدود جذر مورد نظر برسید و اگر به عدد بزرگتر نزدیک بود ؛ **۰/۱** ، **۰/۱** ، **۰/۱** از عدد بزرگتر کم کنید تا به حدود جذر مورد نظر برسید.

عدد	۴/۵	۴/۱	۴/۲	۴/۳
مجذور	۲۰/۲۵	۱۶/۸۱	۱۷/۶۴	۱۸/۴۹

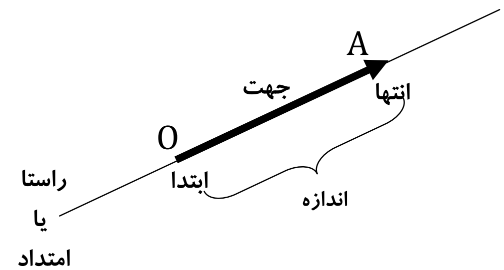
پس داریم : $\sqrt{۱۸} \simeq ۴/۲$

فصل هشتم بردار و مختصات

شناخت بردار :

حرکت و نیرو را با پاره خط های جهت دار نشان میدهیم .

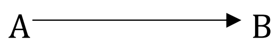
در ریاضی به پاره خط جهت دار **بردار** می گوییم. بردار OA را به صورت $\overrightarrow{OA}$ نشان می دهیم .



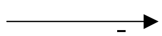
نام گذاری بردار :

این کار به دو صورت انجام می شود :

الف - نخست نقطهٔ ابتدا ، سپس نقطهٔ انتها را نوشته و نماد $\rightarrow$ را روی آن قرار دهید . مانند : $\overrightarrow{AB}$



ب - با یک حرف کوچک لاتین که در وسط بردار قرار می گیرد ، انجام می شود . مانند :



اندازه (طول) بردار :

برای رسیدن به اندازهٔ بردار نخست به جهت حرکت بردار توجه نمایید (سمت راست + و سمت چپ −) و سپس تعداد واحد های بین ابتدا و انتهای بردار را بشمارید.

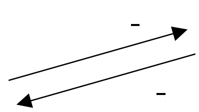
بردار های مساوی :

دو بردار وقتی برابرند که هم راستا ، هم اندازه و هم جهت باشند.

بردار های قرینه :

دو بردار وقتی قرینهٔ یکدیگرند که مساوی باشند اما در خلاف جهت هم حرکت کنند .

مانند :



توجه : جمع دو بردار قرینه ، همیشه صفر می شود .

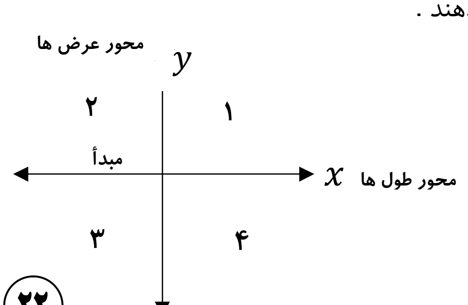
مختصات :

از دو محور عمود بر هم تشکیل می شود . محور افقی را محور طول ها (x ها) و محور عمودی را محور عرض ها (y ها) می نامند .

محل برخورد دو محور را « مبدأ مختصات » می نامند و با حرف O نمایش می دهند .

محورهای مختصات صفحه را به ۴ قسمت تقسیم میکنند.

در شکل مقابل این ۴ ناحیه با عددهای ۱ تا ۴ مشخص شده اند.



مختصات نقطه :

به طول و عرض هر نقطه که به صورت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نمایش داده میشود ، مختصات آن نقطه گفته می شود .

این مختصات می تواند $+$ ، $-$ یا حتی ۰ باشد .

مختصات نقاط در ٤ قسمت :

اگر نقطه ای در قسمت **۱** (ربع یا ناحیهٔ اول) قرار گرفته باشد ، دارای طول و عرض مثبت می باشد .

قسمت **۱** $\longrightarrow \begin{bmatrix} x & + \\ y & + \end{bmatrix}$

اگر نقطه در قسمت **۲** (ربع یا ناحیهٔ دوم) قرار گرفته باشد ، دارای طول منفی و عرض مثبت می باشد .

قسمت **۲** $\longrightarrow \begin{bmatrix} x & - \\ y & + \end{bmatrix}$

اگر نقطه در قسمت **۳** (ربع یا ناحیهٔ سوم) قرار گرفته باشد ، دارای طول و عرض منفی می باشد .

قسمت **۳** $\longrightarrow \begin{bmatrix} x & - \\ y & - \end{bmatrix}$

و اگر نقطه در قسمت **۴** (ربع یا ناحیهٔ چهارم) قرار گرفته باشد ، دارای طول مثبت و عرض منفی می باشد .

قسمت **۴** $\longrightarrow \begin{bmatrix} x & + \\ y & - \end{bmatrix}$

اگر نقطه ای روی محور طول ها (x ها) قرار گرفته باشد ، طول آن نقطه عدد و عرض آن ۰ می شود .

نقطه روی محور x ها $\longrightarrow \begin{bmatrix} x \ \text{عدد} \\ \circ \end{bmatrix}$

❊ تمام **بردارهایی** که موازی محور x ها باشند نیز دارای عرض ۰ می باشند .

اگر نقطه ای روی محور عرض ها (y ها) قرار گرفته باشد ، طول آن نقطه ۰ و عرض آن عدد می شود .

نقطه روی محور y ها $\longrightarrow \begin{bmatrix} \circ \\ y \ \text{عدد} \end{bmatrix}$

❊ تمام **بردارهایی** که موازی محور y ها باشند نیز دارای طول ۰ می باشند .

مختصات مبدأ مختصات :

محل برخورد محورهای مختصات را با حرف O نمایش می دهند و مختصات آن برابر است با :

$$O = \begin{bmatrix} \circ \\ \circ \end{bmatrix}$$

جمع متناظر بردار :

در نوشتن جمع متناظر با یک بردار به مقدار (عدد) ابتدا ، اندازه و انتهای آن نیاز دارید تا با استفاده از دستور زیر بتوانید جمع متناظر بردار را بنویسید .

انتها = اندازه + ابتدا

بردار انتقال :

به برداری گفته می شود که یک نقطه یا یک شکل را به اندازهٔ مختصاتش (از ابتدا به انتها) منتقل نماید .

قرینۀ بردار :

قرینۀ ابتدا و انتهای بردارمورد نظر را **نسبت** به مبدأ مختصات یا یکی از محورها (طول یا عرض) یافته و سپس بردار قرینه را رسم می کنیم .

قرینۀ بردار نسبت به محور طول ها :

فقط عرض بردار قرینه می شود .

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{نسبت یه محور طول ها}} \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

قرینۀ بردار نسبت به محور عرض ها :

فقط طول بردار قرینه می شود .

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{نسبت یه محور عرض ها}} \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

قرینۀ بردار نسبت به مبدأ مختصات :

طول و عرض بردار هر دو قرینه می شود .

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{نسبت یه مبدأ مختصات}} \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

یافتن مقدار مجهول درتساوی های برداری :

اگر مقدار مجهول (نا معلوم) در انتهای تساوی برداری بود ، مقدارهای ابتدا و اندازه را با هم جمع کنید . مانند :

$$\begin{bmatrix} ۲ \\ -۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۳ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$x = ۲ + (-۳) = -۱$$

$$y = (-۴) + ۱ = -۳$$

اگر مقدار مجهول (نا معلوم) در ابتدا یا اندازۀ تساوی برداری قرار گرفته بود ، مقدار انتها را منهای قسمت دیگر کنید .

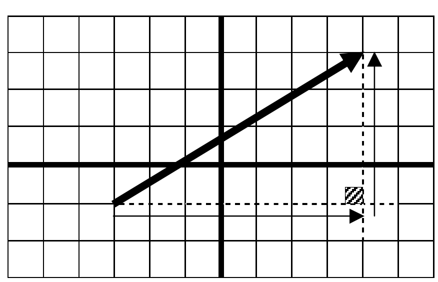
$$\begin{bmatrix} ۲ \\ -y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x \\ -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$-x = (-۲) - ۲ \Rightarrow x = ۴$$

$$-y = ۳ - (-۲) \Rightarrow y = -۵$$

تعیین مختصات بردار به کمک ترسیم :

از ابتدا و انتهای بردار ، دو خط به موازات محور طول و عرض به ترتیب رسم کنید تا در نقطه ای یکدیگر را قطع کنند و تشکیل یک مثلث قائم الزاویه دهند . حالا از ابتدا به سمت انتهای بردار حرکت کنید تا هم جهت و هم مختصات آن را مشخص کنید . مانند :



می بینید از ابتدای بردار ۷ واحد به سمت راست حرکت کرده ایم ، یعنی **۷ +** و **۴** واحد نیز به سمت بالا حرکت کرده ایم .

پس مختصات بردارمورد نظر $\begin{bmatrix} +۷ \\ +۴ \end{bmatrix}$ خواهد بود .

فصل نهم آمار و احتمال

علم آمار :

علم آمار علم **جمع آوری اطّلاعات** ، **سازماندهی** و **بررسی** آنها است .

اطّلاعات جمع آوری شده را داده های آماری میگویند.

برای مقایسه و بررسی بهتر داده های آماری از انواع **نمودارها** استفاده می کنند .

هرنمودار با توجّه به موضوعی که داده های آن جمع آوری شده است و نوع اطّلاعات به دست آمده ، کارایی دارد .

نمودار ها و تفسیر نتیجه ها :

نمودار میله ای :

نمودار میله ای برای **مقایسهٔ تعداد** ، **پیدا کردن بیشترین** و **کمترین** داده به کار می رود .

در حال حاضر نرم افزار های زیادی برای رسم انواع نمودار ها وجود دارند.

آنچه اهمیت دارد رسم نمودار نیست ؛ بلکه انتخاب نمودار مناسب برای موضوع مورد نظر است .

نمودار خط شکسته :

نمودار خط شکسته برای **نمایش تغییرها** کاربرد دارد؛ بنابراین در موضوع هایی که تغییرها اهمّیت دارد، از این نمودار استفاده می شود .

برای نمونه تغییرها در بازار های مالی ، قیمت طلا ، نفت ، سهام و ... را با این نمودار نشان می دهند.

گاهی وقت ها به جای داده های واقعی از مقدار تقریبی

آنها استفاده می کنیم . در برنامه ریزی های کلان به

عدد های واقعی و دقیق نیاز نداریم .

برای مثال مقدار تولید گندم یک استان را به صورت چند هزار تن بیان می کنند ؛ یعنی مقدار کمتر از ۱۰۰۰

تن یا یک میلیون کیلوگرم در این بررسی اهمّیت ندارد.

نمودار دایره ای :

بعضی از داده ها و اطّلاعات جمع آوری شده نشان میدهد که یک مقدار مشخّص به چه نسبتی به بخش های کوچک تر تقسیم شده است .

در این موارد می توان تقسیم شدن را روی یک شکل مثل دایره نشان داد و سهم هر بخش را روی دایره

مشخّص کرد .

در نمودار دایره ای به طور معمول **نسبت و سهم** هر بخش را به صورت **درصد** محاسبه کرده ؛ و سپس روی نمودار نمایش می دهند.

نمودار تصویری :

گاهی وقت ها به جای داده های واقعی از مقدار تقریبی آنها استفاده می کنیم . در برنامه ریزی های کلان به عدد های واقعی و دقیق نیاز نداریم . برای مثال مقدار تولید گندم یک استان را به صورت چند هزار تن بیان می کنند ؛ یعنی مقدار کمتر از ۱۰۰۰ تن یا یک میلیون کیلوگرم در این بررسی اهمّیت ندارد.

ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را با تقریب کمتر از مقدار مورد نظر گرد کنید. سپس با رسم یک شکل برای تعدادی مشخص ، نمودار تصویری آن را رسم کنید.

دسته بندی داده ها :

اگر داده های جمع آوری شده زیاد و پراکنده باشند، بررسی آنها طولانی می شود . برای اینکه بتوانیم آسانتر و بهتر نتیجه بگیریم ، داده ها را متناسب با موضوع آماری **دسته بندی و سازماندهی** می کنیم.

به فاصلهٔ بین کمترین و بیشترین داده ، **دامنهٔ تغییرات** می گویند.

فراوانی :

تعداد داده های هر دسته را ، **فراوانی** میگویند . فراوانی را به دو صورت زیر می توان نشان داد :

۱ - استفاده از چوب خط

۲ - استفاده از عدد

میانگین داده ها :

پس از اینکه داده های آماری در جدول سازماندهی می شوند و به کمک **نمودارها** درک بهتری از داده ها به دست می آید، می توان از میانگین داده ها نیز برای کامل تر شدن نتایج حاصل از داده ها و تحلیل و تفسیر بهتر آنها استفاده کرد . میانگین تعدادی دادهٔ عددی ،

از تقسیم **مجموع آنها بر تعدادشان** به دست می آید.

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده ها}}{\text{تعداد داده ها}}$$

به صورت جبری : $\overline{x} = \dfrac{s}{n}$

اگر تعداد داده ها زیاد باشد و داده ها دسته بندی شده باشند ، می توان میانگین داده ها را با **تقریب** بسیار خوب به دست آورد.

احتمال یا اندازه گیری شانس

وقتی یک سکه را می اندازیم، دو حالتِ هم شانس ممکن است اتفاق بیفتد ، یا سکه رو می آید یا پشت و چون در یک حالت از این دو حالت ممکن ، سکه رو می آید ؛ پس احتمال رو آمدن سکه $\frac{۱}{۲}$ است .

به این ترتیب برای بیان اندازهٔ شانس رخ دادن یک اتفاق ، از یک عدد استفاده کرده ایم که احتمال رخ دادن آن اتفاق نامیده می شود.

برای اینکه احتمال رخ دادن یک اتفاق را به دست آوریم ، ابتدا همهٔ حالت های ممکن را می یابیم ، سپس حالت های موردنظر را از میان حالت های ممکن پیدا می کنیم .

احتمال رخ دادن اتفاق موردنظر برابر است با نسبت تعداد حالت های موردنظر به تعداد حالت های ممکن ؛ بنابراین احتمال رخ دادن یک اتفاق از دستور زیر به دست خواهد آمد :

به عبارت دیگر برای اینکه احتمال رخ دادن یک پیشامد را بیابیم ، تعداد حالت های منجر به آن اتفاق را بر تعداد کل حالت ها تقسیم می کنیم:

$$\textbf{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالتهای مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالتهای ممکن}}$$

※ احتمال روی دادن هر پیشامد را با یک کسر که بین صفر و یک می باشد ، نشان می دهیم .

محاسبهٔ n بار از انتظار یک پیشامد :

از دستور زیر کمک می گیریم :

تعداد کل انجام کار × احتمال روی دادن اتفاق

مثال :

تاسی را ۶۰ بار پرتاب می کنیم . انتظار داریم چند بار عدد **۴** بیاید ؟

$$\frac{۱}{۶} \times ۶۰ = ۶$$

مجموع روی داد و روی ندادن یک پیشامد :

مجموع احتمال روی دادن و احتمال روی ندادن یک اتفاق همیشه برابر با عدد **۱** است .

روش های نوشتن کل حالت های یک پیشامد :

برای این کار از دو روش زیر کمک بگیرید .

۱) جدول نظام دار ۲) نمودار درختی

جدول نظام دار برای حالتی مناسب که دو رویداد را مورد بررسی قرار دهیم . در این روش حالتهای یک رویداد را افقی و حالتهای رویداد بعدی را عمودی نوشته و مانند جدول ضرب ، سایر خانه ها را پر میکنیم .

در روش نمودار درختی ، برای هر حالت یک شاخه در نظر گرفته و در انتهای هر شاخه ، حالتهای پیشامد بعدی را می نویسیم .

روش نمودار درختی می تواند بهترین روش برای محاسبهٔ همهٔ حالتهای رخ داد یک پیشامد باشد .