عددهای صحیح وگویا
فصل ۱

مجموعه اعداد صحیح

به اجتماع مجموعه اعداد طبیعی ، قرینه اعداد طبیعی و عدد صفر مجموعه اعداد صحیح (عدد های علامت دار) گفته میشود. این مجموعه را با حرف Z نشان می دهند.

$$Z = \{\dots, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \dots\}$$

نکته ۱ : در این مجموعه اعداد کسری و اعشاری جایی ندارد.

نکته ۲ : در مجموعه اعداد صحیح کوچکترین و بزرگترین عضو نا مشخص می باشد.

- به عنوان مثال :

در مجموعه اعداد صحیح مثبت {...،۳،۲،۱} ، بزرگترین عضو نا مشخص است و کوچکترین عضو آن عدد (۱) است.

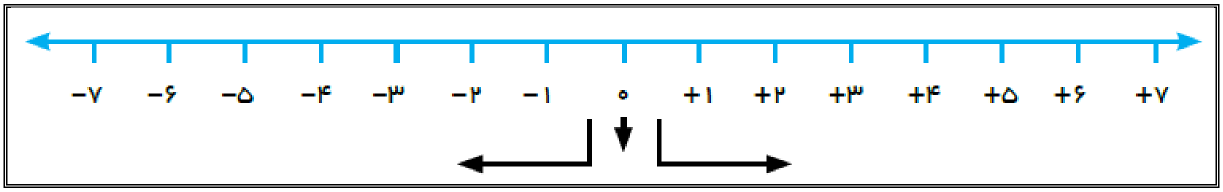
یا در مجموعه اعداد صحیح منفی {۱-،۲-،۳-،...} ، کوچکترین عضو نا مشخص است و بزرگترین عضو عدد (۱-) است.

نکته ۳ : دقت کنید که عدد صفر نه مثبت است و نه منفی.

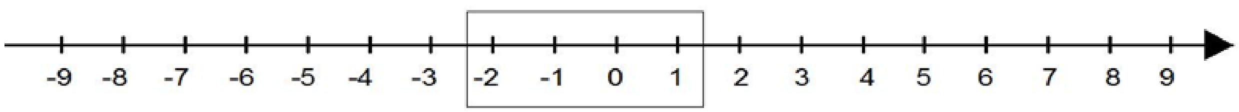
نکته ٤ : برای قرینه یک عدد کافیست آن عدد را در یک ۱- ضرب کنیم تا قرینه آن بدست آید.

مثال قرینه عدد ۲۲ عدد ۲۲- است و قرینه عدد ۵- عدد ۵ است، چون $-(-۵)=۵$

نکته ۵ : محور مجموعه اعداد صحیح به صورت مقابل می باشد :



مثال مجموعه اعداد صحیح بین ۳- و ۲ را روی محور نشان دهید؟



- **وقتی در سوال می‌گوید بین دو عدد صحیح، یعنی خود آن دو عدد به حساب نمی‌آیند.**
  در اینصورت مجموعه اعداد صحیح بین ۳- و ۲ برابراست با : $\{-۲,-۱,۰,۱\}$

جمع عددهای صحیح

نکته مهم: از این پس در جمع و تفریق اعداد صحیح مختصرنویسی می‌کنیم، یعنی پرانتزها را نمی‌نویسیم و علامت‌های + را هم، تا حد امکان نمی‌گذاریم.

مثال $(+۱۲)+(-۱۰)=۱۲-۱۰$

نوع اول: گاهی با برداشتن پرانتز و یا جابجایی دو عدد، مجموع به جمع یا تفریق عددهای طبیعی تبدیل می شود. در این موارد حاصل به سادگی بدست می‌آید.

مثال حاصل جمع‌های روبرو را بدست آورید؟

$(+۱۳)+(-۴)=۱۳-۴=۹$

$(-۴)+(+۶)=-۴+۶=۶-۴=۲$

نوع دوم: هرگاه با برداشتن پرانتز جمع یا تفریق عادی بدست نیاید، از قرینه‌یابی استفاده می‌کنیم.

حاصل جمع‌های روبرو را بدست آورید؟

$(-۱۳)+(-۴)=-(۱۳+۴)=-۱۷$

$(-۴)+(+۱)=-(۴-۱)=-۳$

- ✓ *نکته : برای جمع دو عدد منفی کافیست، دو عدد را با هم جمع کنیم وعلامت منفی را پشت عدد مجموع بگذاریم.*
- ✓ *نکته: برای جمع دو عدد که یکی منفی و دیگری مثبت است کافیست، علامت عددی که بزرگتر است را بگذاریم و سپس عدد کوچک را از بزرگ کم کنیم.*

تفریق عددهای صحیح

تفریق عدد b از a را می‌توان به این صورت بیان کرد که قرینه b را با a جمع کنیم. به این کار تبدیل تفریق به جمع نیز گفته می‌شود.

$a-b=a+(-b)$

نحوه مختصر کردن عبارت‌های تفریق: پرانتزها را برداشته، عدد اول را با علامتش می‌گذاریم و عدد دوم را قرینه می‌کنیم.

مثال حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید؟

$(-۱۳)-(-۴)=-۱۳+۴=۷$

$(-۴)-(+۱)=-۴-۱=-۵$

$(+۳)-(-۴)=۳+۴=۷$

- ✓ *برای جمع و تفریق چند عدد صحیح می‌توان اعداد منفی را با هم و اعداد مثبت را با هم جمع کنیم.*
- ✓ *اگر در عبارتی پرانتز وجود داشته باشد ابتدا باید عمل داخل پرانتز را انجام داد.*

اعداد طبیعی

در دوران ابتدایی با اعداد ۱، ۲، ۳، ... آشنا شده‌اید. به این اعداد مجموعه اعداد طبیعی می‌گویند و این مجموعه را با N نمایش می‌دهند. این اعداد را به صورت یک مجموعه به شکل زیر نمایش می‌دهند:

$N = \{۱,۲,۳,۴,۵,...\}$

- ✓ نکته: کوچکترین عدد طبیعی «یک» است.
- ✓ نکته: بزرگترین عدد طبیعی را نمی‌توان مشخص کرد، زیرا هر چقدر عدد بزرگی را تصور کنیم، باز هم عدد طبیعی بزرگتر از آن عدد وجود دارد.

- ✓ نکته: علامت $\in$ به معنی عضو بودن و علامت $\notin$ به معنی عضو نبودن است.

مثال: معنی عبارت $۲۳ \in N$ این است که: عدد ۲۳ عضو مجموعه اعداد طبیعی است و عبارت $-۲ \notin N$ یعنی عدد ۲- عضو مجموعه اعداد طبیعی نیست.

مثال: $۱۳۵۶۷۳۴ \in N$ $۱۲۶ \in N$ $-۲ \notin N$ $۰ \notin N$ $\frac{۱}{۴} \notin N$

❖ تمرین در کلاس

۱) حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

$-۶۷-۱۰=$	$۱۲-۱۰=$	$-۷+۱۶=$	$۱۵-۸=$
$۱۲+۲۳-۴۰$	$-۱۵-۱۲+۲۰=$	$-۳+۹=$	$۸۷-۱۲=$
$-۶۷+(-۱۴)=$	$-۱۲-(-۱۰)=$	$-۶+(۱۶)=$	$-۱۵-۵=$

۲) حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

$-۵+۳-۲=$

$(-۱۷-۱۱)+۱۴=$

$-۱۷-(+۱۸)=$

$-۷-(-۴)+۱۳=$

$-(-۵)-۶=$

$-۷-۶۵+۴۲=$

$-۱۲-(-۳+۸)=$

$۱۲+(-۳-۹-۴)=$

۳) درستی یا نادرستی عبارت های زیر مشخص کنید.

$$-۳\in Z \qquad -۲\notin N \qquad -(-۵)\in N \qquad ۲/۳ \in Z \qquad \frac{-۴}{-۲}\in N$$

مجموعه اعداد گویا

- کسرهایی به شکل $\frac{۲}{۵},\frac{-۷}{۳},\frac{۱۱}{-۱۳}$ همگی اعدادی گویا هستند. به طور کلی اعداد گویا به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$Q=\{\frac{a}{b}\mid a,b\in Z, b\neq ۰\}$ نمایش ریاضی اعداد گویا

نکته: تمامی اعداد طبیعی، صحیح و اعداد اعشاری جزء اعداد گویا هستند.

$$-۸/۳۴۵=\frac{-۸۳۴۵}{۱۰۰۰} \qquad ۵=\frac{۵}{۱} \qquad -۰/۲۵=-\frac{۲۵}{۱۰۰}$$

نکته : در کسرها فرق نمی‌کند که علامت منفی در صورت باشد یا در مخرج و یا اینکه پشت کسر باشد.

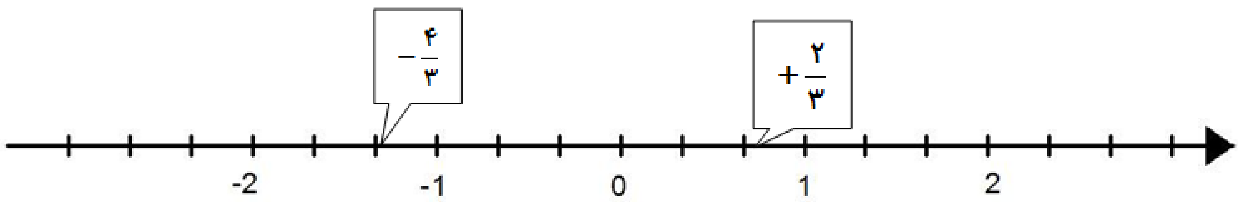
$$\frac{-۴}{۵}=\frac{۴}{-۵}=-\frac{۴}{۵}$$

نکته: اعداد طبیعی زیر مجموعه اعداد صحیح و اعداد صحیح زیر مجموعه اعداد گویا است.

➢ **اعداد گنگ یا اصم : اعدادی به صورت $\pm\sqrt{a}$ را اعداد گنگ یا اصم می‌گویند. مانند $\sqrt{۲}, \sqrt{۳}, \sqrt{۵}, ...$**

نمایش اعداد گویا روی محور

هر عدد گویا را می‌توان با نقطه‌های روی محور و یا با یک بردار مشخص کرد.



تساوی کسرها

کسر $\frac{a}{b}$ را در نظر بگیرید. (در این کسر اعداد a و b، هر دو یا یکی از آنها می‌توانند منفی باشند).
اگر صورت و مخرج این کسر را در یک عدد طبیعی غیر صفر ضرب کنیم و یا در صورت امکان بر یک عدد طبیعی غیر صفر تقسیم کنیم، کسرهای حاصل می‌شوند که این کسرها مساوی هستند.

مثال : کسر $\frac{۲}{۳}$ را در نظر بگیرید. اگر صورت و مخرج این کسر را در عدد ۲ ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{۲\times(۲)}{۳\times(۲)}=\frac{۴}{۶}$$

پس کسر $\frac{۲}{۳}$ با کسر $\frac{۴}{۶}$ مساوی است.

مثال : با توجه به تساوی $\frac{-۲}{۵}=\frac{-۴}{۱۰}$ سه کسر دیگر را ادامه دهید.

حل: $\frac{-۲}{۵}=\frac{-۴}{۱۰}=\frac{-۶}{۱۵}=\frac{-۸}{۲۰}=\frac{-۱۰}{۲۵}$

جمع وتفریق اعداد گویا

حالت اول: مخرج کسر ها برابر باشد. در این حالت بعد از برداشتن پرانتزها و مختصرنویسی، مانند اعداد صحیح و طبیعی جمع و تفریق انجام می‌دهیم.

مثال: $(\frac{-۲}{۳})+(\frac{۴}{۳})=\frac{-۲}{۳}+\frac{۴}{۳}=\frac{۲}{۳}$

حالت دوم: مخرج کسرها برابر نباشد. در این حالت با مخرج مشترک گرفتن، مخرج کسرها را مساوی می‌کنیم و سپس اقدام به جمع و تفریق می‌کنیم.

مثال: $\frac{۵}{۳}+\frac{۶}{۷}=\frac{۳۵}{۲۱}+\frac{۱۸}{۲۱}=\frac{۵۳}{۲۱}$

مثال :

$۰/۵+۰/۸=\frac{۵}{۱۰}+\frac{۸}{۱۰}=\frac{۱۳}{۱۰۰}=۰/۱۳$

$-۲/۳-۱/۲=\frac{-۲۳}{۱۰}-\frac{۱۲}{۱۰}=\frac{-۳۵}{۱۰}=-۳/۵$

$۲۴-۱۰/۴=۱۳/۶$

$-۱۷/۳۵+۵=-۱۲/۳۵$

ضرب و تقسیم اعداد گویا

الف- ضرب: برای ضرب دو عدد گویا ابتدا علامت‌ها را در هم ضرب می‌کنیم، سپس صورت دو کسر را در هم و مخرج‌های دو کسر را هم در یکدیگر ضرب می‌کنیم.

- ✓ نکته: اگر یک عدد منفی در یک عدد منفی ضرب شود حاصل یک عدد مثبت است.
- ✓ نکته: اگر یک عدد منفی در یک عدد مثبت ضرب شود حاصل یک عدد منفی است و برعکس.
- ✓ نکته: اگر یک عدد مثبت در یک عدد مثبت ضرب شود حاصل یک عدد مثبت است.

مثال : $-\frac{۵}{۳}\times\frac{۶}{۷}=-\frac{۳۰}{۲۱}$

ب- تقسیم: برای تقسیم دو عدد گویا بر هم، عدد اول را در معکوس عدد دوم ضرب می‌کنیم. البته می‌توانیم علامت حاصل را ابتدا مشخص کنیم.

- ✓ *نکته: اگر یک عدد منفی را بر یک عدد منفی تقسیم کنیم حاصل یک عدد مثبت است.*
- ✓ *نکته: اگر یک عدد منفی را بر یک عدد مثبت تقسیم کنیم حاصل یک عدد مثبت است و برعکس.*
- ✓ *نکته: اگر یک عدد مثبت را بر یک عدد مثبت تقسیم کنیم حاصل یک عدد مثبت است.*
- ✓ *نکته: معکوس کسر $\frac{a}{b}$ برابر است با کسر $\frac{b}{a}$. معکوس عدد a برابر است با $\frac{۱}{a}$. به زبان ساده معکوس کردن یک عدد یعنی، جای صورت را با مخرج عوض کنیم.*

مثال :

$$-\frac{۵}{۳}\div\frac{۶}{۷}=-\frac{۵}{۳}\times\frac{۷}{۶}=-\frac{۳۵}{۱۸}$$

نکته: در محاسبات ریاضی حتماً باید الویت‌های زیر به ترتیب انجام شوند.

۱. پرانتز ۲. توان و جذر ۳. ضرب و تقسیم(از چپ و راست) ۴. جمع و تفریق

نکته: برای هر دو کسر مساوی رابطه روبرو(طرفین وسطین) برقرار است: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=cb$

نکته: هر کسری که صورتش صفر باشد به شرط آنکه مخرجش صفر نباشد، برابر صفر است.(مخرج کسر نمی‌تواند صفر باشد)

❖ ***<u>تمرین در کلاس</u>***

۱) حاصل جمع و تفریق‌های زیر را انجام دهید.

$\frac{۱۲}{۱۳}+\frac{-۲۱}{۱۳}=$ $\qquad$ $\frac{-۳}{۷}+\frac{۸}{۷}=$ $\qquad$ $\frac{-۳}{۸}+\frac{۲}{۸}=$

$\frac{-۳}{۱۵}+\frac{۴}{۱۰}=$ $\qquad$ $\frac{-۳}{۱۱}+\frac{۱}{۲}=$ $\qquad$ $\frac{۳}{۸}+\frac{۲}{۴}=$

$\frac{۵}{۶}+\frac{-۱۰}{۱۳}=$ $\qquad$ $\frac{۳}{۱۸}+\frac{۳}{۵}=$ $\qquad$ $-\frac{۳}{۲۰}+\frac{۲}{۱۰}=$

$\frac{۲}{۱۳}-\left(\frac{-۲۱}{۱۳}\right)=$ $\qquad$ $\frac{-۳}{۱۱}-\frac{۷}{۱۱}=$ $\qquad$ $\frac{-۲}{۳}-\frac{۲}{۳}=$

$\frac{۱۲}{۱۵}-\frac{۱۱}{۲۰}=$ $\qquad$ $\frac{-۳}{۱۱}-\frac{۱}{۲۲}=$ $\qquad$ $\frac{۳}{۸}-\frac{۲}{۴}=$

$\frac{۵}{۶}-\frac{-۸}{۷}=$ $\qquad$ $\frac{۳}{۱۸}-\frac{۴}{۹}=$ $\qquad$ $-\frac{۳}{۱۶}-\frac{۲}{۴}=$

۲) حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

$\frac{۳}{۷}-\frac{۴}{۷}-\frac{۲}{۷}+\frac{۳}{۱۱}=$ $\qquad$ $\frac{۳}{۷}+\frac{۴}{۷}+\frac{۲}{۹}=$

۳) حاصل ضرب و تقسیم های زیر را بدست آورید.

$\frac{۱۲}{۱۳}\times(-۱۰)=$ $\qquad$ $\frac{-۳}{۷}\times ۸=$ $\qquad$ $\frac{-۳}{۸}\times\frac{۲}{۳}=$

$\frac{-۳}{۱۵}\times\frac{۴}{۱۰}=$ $\qquad$ $\frac{-۳}{۱۱}\times\frac{۱}{۲}=$ $\qquad$ $\frac{۳}{۸}\times\frac{۲}{۴}=$

$\frac{۵}{۶}\times\frac{-۱۰}{۱۳}=$ $\qquad$ $-\frac{۳}{۱۸}\times(-\frac{۳}{۵})=$ $\qquad$ $-\frac{۳}{۲۰}\times\frac{۲}{۱۰}=$

$\frac{۱۲}{۱۳} \div (-۱۰) =$ $\quad$ $\frac{-۳}{۷} \div ۱۲ =$ $\quad$ $\frac{-۳}{۸} \div \frac{۲}{۳} =$

$\frac{-۳}{۱۵} \div \frac{۴}{۵} =$ $\quad$ $\frac{-۳}{۱۱} \div \frac{۱}{۲} =$ $\quad$ $\frac{۳}{۲} \div \frac{۲}{۴} =$

$-\frac{۵}{۶} \div \frac{-۱۰}{۱۳} =$ $\quad$ $-\frac{۳}{۱۸} \div (-\frac{۳}{۵}) =$ $\quad$ $-\frac{۳}{۲} \div \frac{۲}{۱۰} =$

۴) جملات صحیح و غلط را مشخص کنید.

- قرینه‌ی هر عدد منفی از خود عدد کوچکتر است. ص ▢ غ ▢
- اعداد گنگ را نمی‌توانیم به صورت کسری بنویسیم. ص ▢ غ ▢
- حاصلضرب هر عدد مخالف صفر در قرینه‌اش برابر ۱ است. ص ▢ غ ▢
- حاصل تقسیم $a \div b$ با حاصلضرب $a \times \frac{1}{b}$ برابر است. $b \neq 0$ ص ▢ غ ▢
- دو کسر $\frac{-۵}{۳}$ و $-\frac{۱۰}{۳}$ با هم برابر هستند. ص ▢ غ ▢
- حاصلضرب عدد $\frac{-۵}{۳}$ در معکوسش برابر عدد ۱- است. ص ▢ غ ▢

۵) جاهای خالی را کامل کنید.

- ثلث هر عدد منفی از خود آن عدد .... است.
- اگر یک عدد کسری مساوی صفر شود حتماً ، .... آن مساوی صفر است.
- معکوس عدد $-۲\frac{۳}{۴}$ برابر است با ....
- قرینه قرینه‌ی هر عدد گویا برابر .... است.
- حاصلضرب $-۲\frac{۱}{۳}$ در قرینه معکوسش برابر .... است.
- حاصل عبارت $-۰/۷۴ + ۱/۲۶$ برابر است با ....

۶) حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

$$\left(\frac{۳}{۷}-\frac{۴}{۷}\right)\div\left(\frac{۲}{۷}+\frac{۳}{۱۱}\right)=$$

$$\left(\frac{۳}{۷}+\frac{۴}{۷}\right)\times\left(-\frac{۲}{۹}\right)=$$

$$\left(\frac{۲۵}{۲۴}\times\frac{۱۲}{۱۵}\right)\div\left(-\frac{۲}{۵}\right)=$$

$$\left(\frac{-۵}{۸}+\frac{۷}{۱۲}\right)\div\left(\frac{-۱}{۶}\right)=$$

$$\left(\frac{-۴}{۲۱}\times\frac{۵}{۱۴}\right)\times\left(-\frac{۲۱}{۴}\right)=$$

$$\left(\frac{-۷}{۱۲}-\left(\frac{-۵}{۸}\right)\right)\div\left(\frac{-۱}{۸}\right)=$$

$$\left(\frac{-۱۸}{۱۵}-\frac{۳}{۱۰}\right)\div\left(-\frac{۳}{۵}\right)=$$

$$\left(\frac{۱۱}{۲۰}-\left(\frac{-۷}{۱۵}\right)\right)\times\left(-۷-۲۳\right)=$$

$$\left(-۷-۱۲-(-۴)\right)\times\left(\frac{-۵}{۸}+\frac{۴}{۱۲}\right)=$$

$$\frac{-۵}{۴۲}-\left(-\frac{۶}{۳۵}\right)=$$

$$\frac{۳}{۴}\div\left(\frac{۵}{۱۲}-\left(-\frac{۱}{۸}\right)\right)=$$

فصل ۲ حساب عددهای طبیعی

اعداد اول

اعدادی به غیر از یک، که فقط بر خودشان و یک بخش پذیر هستند را اعداد اول می‌نامند. به عبارت دیگر هر عددی که به غیر از خودش و ۱، مقسوم علیه دیگری نداشته باشد را، عدد اول گویند. (اعداد اول فقط دو مقسوم علیه یا دو شمارنده دارند).

اعدادی مانند ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳ و ... اعداد اول هستند. تنها عدد اول زوج عدد ۲ است.

۱۱ = ۱۱ × ۱

۱۳ = ۱۳ × ۱

۱۷ = ۱۷ × ۱

اعداد مرکب

اگر a و b اعدادی طبیعی باشند و c نیز عددی طبیعی باشد و داشته باشیم : $a \times b = c$ آنگاه a و b را مقسوم علیه‌های c می‌گویند. هر عددی که بیش از دو مقسوم‌علیه داشته باشد عدد مرکب نامیده می‌شود.

مثال: عدد ۲۴ را می‌توان به صورت ۲۴ = ۳ × ۸ و ۲۴ = ۴ × ۶ و ۲۴ = ۲۴ × ۱ نوشت، در اینصورت اعداد ۱، ۳، ٤، ٦، ۸ و ۲٤ را مقسوم‌علیه‌های عدد ۲٤ می‌گویند.

- ✓ نکته: هر عدد مقسوم‌علیه خودش است.
- ✓ نکته: عدد یک مقسوم علیه تمام اعداد است.

- ✓ نکته: برای تشخیص اینکه عددی طبیعی مثل A اول است یا مرکب، کافیست بخش‌پذیری A را بر اعداد اولی که مجذورشان کوچک‌تر یا مساوی A است بررسی نمائید، اگر بر هیچ یک از این اعداد بخش‌پذیر نبود، آنگاه عدد A اول است.
- ✓ نکته: مجذور یک عدد یعنی آن عدد ضربدر خودش. مثلاً مجذور ۲ یعنی ۴ = ۲×۲
- ✓ نکته: هرگاه مجموع دو عدد اول، عددی فرد باشد، یکی از آن دو عدد حتماً عدد ۲ است. (مجموع دو عدد هنگامی فرد خواهد شد که یک عدد زوج با یک عدد فرد جمع شود)

مثال: عدد ۱۴۳ اول است یا مرکب؟

بخش‌پذیری ۱۴۳ را بر اعداد اول ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ... بررسی می‌نمائیم. این عدد بر ۱۱ بخش پذیر است پس ۱۴۳ عددی مرکب است.

۱۴۳ = ۱×۱۴۳   ۱۴۳ = ۱۱×۱۳

مثال: عدد ۸۳ اول است یا مرکب؟

بخش‌پذیری ۸۳ را بر اعداد اول ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ... بررسی می‌نمائیم. این کار را تا کجا باید ادامه داد؟ عدد ۸۳ بر ۲، ۳، ۵، ۷ بخش‌پذیر نیست. پس دیگر لازم نیست بخش‌پذیری آن را بر عدد ۱۱ بررسی کنیم چون مجذور عدد ۱۱ یعنی ۱۲۱ از ۸۳ بزرگتر است. پس ۸۳ عددی اول است.

نکته:

۷×۷ = ۴۹	۵×۵ = ۲۵	۳×۳ = ۹	۲×۲ = ۴
۱۹×۱۹ = ۳۶۱	۱۷×۱۷ = ۲۸۹	۱۳×۱۳ = ۱۶۹	۱۱×۱۱ = ۱۲۱

مضرب‌های طبیعی

برای نوشتن مضرب‌های یک عدد طبیعی مانند K کافیست، عدد طبیعی K را در اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ٤، ... ضرب کنیم تا مضرب‌های عدد K بدست آید.

مثال: مضرب‌های طبیعی اعداد ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ را بنویسید؟

۱۱×۱=۱۱	۷×۱=۷	۵×۱=۵	۳×۱=۳	۲×۱=۲
۱۱×۲=۲۲	۷×۲=۱۴	۵×۲=۱۰	۳×۲=۶	۲×۲=۴
۱۱×۳=۳۳	۷×۳=۲۱	۵×۳=۱۵	۳×۳=۹	۲×۳=۶
۱۱×۴=۴۴	۷×۴=۲۸	۵×۴=۲۰	۳×۴=۱۲	۲×۴=۸
۱۱×۵=۵۵	۷×۵=۳۵	۵×۵=۲۵	۳×۵=۱۵	۲×۵=۱۰
۱۱×۶=۶۶	۷×۶=۴۲	۵×۶=۳۰	۳×۶=۱۸	۲×۶=۱۲
۱۱×۷=۷۷	۷×۷=۴۹	۵×۷=۳۵	۳×۷=۲۱	۲×۷=۱۴
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

❖ ***تمرین در کلاس***

۱) **آیا عدد ۵۳ عددی اول است ؟ چرا؟**

۲) **چهار عدد مرکب بزرگتر از ۲۶ بنویسید؟**

۳) **برای هر عدد یک مقسوم‌علیه غیر از یک و خود عدد بنویسید؟**

۷ =	۲۵ =
۱۰ =	۲۸ =
۳۷ =	۵۴ =
۵۳ =	۱۰۲ =
۱۲۹ =	۱۲۴ =

٤) **دور اعداد مرکب خط بکشید.**

٦٣	۲	۲٦	۲۷	۲۱	۱۱۱
۵۷	١٤	۱۳	۹	۱	۸

۵) آیا عدد ۱۲۷ عددی مرکب است؟ عدد ۱۱۳ چطور؟

٦) در مجموعه {۳۱,۲۹,۱۲۱,۹,۵۷,۹۷} چند عدد اول وجود دارد؟

۷) آیا تمام اعداد اول فرد هستند؟

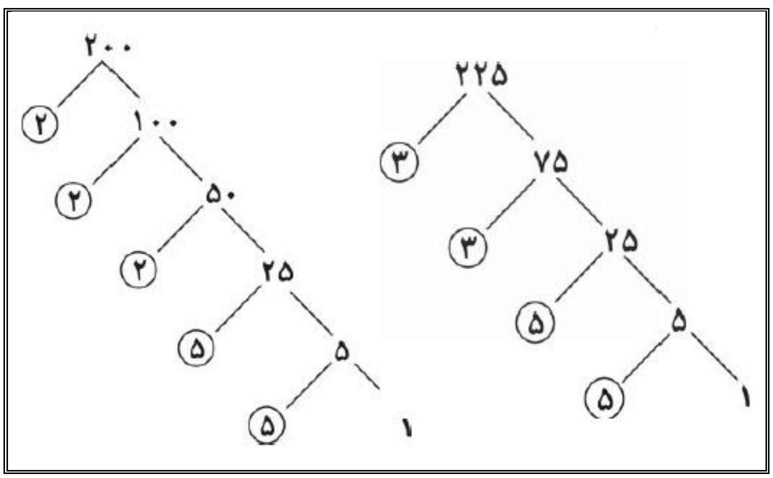
۸) زیر اعداد اول خط بکشید؟

۹۷ ۷۷ ۶۷ ۵۷ ۲۷

۹) آیا حاصلضرب دو عدد اول، عددی اول است؟ توضیح دهید.

تجزیه اعداد به حاصل ضرب عوامل اول

برای تجزیه یک عدد به حاصل ضرب عوامل اول ، آن عدد را برکوچکترین عدد اولی که بر آن بخش پذیر است تقسیم میکنیم ، سپس خارج قسمت تقسیم را بر کوچکترین عدد اولی که بر آن بخش پذیر است تقسیم میکنیم و این عمل را تا جایی ادامه می دهیم که خارج قسمت تقسیم برابر با عدد ۱ (یک) شود. در این صورت حاصل ضرب مقسوم علیه ها (اعداد اول بدست آمده) حاصل ضرب عوامل اول مورد نظر است.



تمرین : هر یک از اعداد ۴۲۰ ، ۷۲۹ و ۱۰۰۰ را به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه کنید.

تعیین اعداد اول ، روش الگوریتم غربال

با استفاده از روش الگوریتم غربال می‌توان اعداد اول را مشخص کرد. این روش یعنی جدا کردن اعداد اول از مرکب که در زیر این روش را شرح می‌دهیم:

- **عدد یک را خط بزنید.**
- **مضرب‌های ۲ را غیر از خود ۲ خط بزنید.**
- **مضرب‌های ۳ را غیر از خود ۳ خط بزنید.**
- **مضرب های ۵ را غیر از خود ۵ خط بزنید.**
- **مضرب‌های ۷ را غیر از خود ۷ خط بزنید.**
- **این کار را تا جایی ادامه دهید که فقط اعداد اول باقی بماند.**

مثال: در جدول زیر اعداد اول را مشخص کنید؟

~~۱~~	2	3	~~۴~~	5	~~۶~~
7	~~۸~~	~~۹~~	~~۱۰~~	11	~~۱۲~~
13	~~۱۴~~	~~۱۵~~	~~۱۶~~	17	~~۱۸~~
19	~~۲۰~~	~~۲۱~~	~~۲۲~~	23	~~۲۴~~
~~۲۵~~	~~۲۶~~	~~۲۷~~	~~۲۸~~	29	~~۳۰~~

۱ . ابتدا عدد ۱ را خط می زنیم.
۲. مضربهای ۲ را به غیر از خود عدد ۲ خط می‌زنیم. (٤، ٦، ۸، ۱۰، ۱۲، ١٤، ١٦، ۱۸، ۲۰، ۲۲، ٢٤، ٢٦، ۲۸، ۳۰)
۳. مضرب‌های ۳ را به غیر از خود عدد ۳ خط می‌زنیم. (۹، ۱۵، ۲۱، ۲۷)
٤ . اولین عددی که به غیر از ۲ و ۳ که خط نخورده ۵ است. پس مضرب‌های ۵ را بغیر از ۵ خط بزنید. (۲۵)
۵. اعداد باقیمانده همگی اول هستند.

❖ تمرین

۱) با استفاده از الگوریتم غربال اعداد اول بین ۳۵ تا ٦٥ را بدست آورید؟

۲) گزینه صحیح و غلط را مشخص کنید.

- تمام اعداد اول فرد هستند. ص ☐ غ ☐
- اعداد اول فقط دو مقسوم علیه دارند. ص ☐ غ ☐
- کوچکترین عدد طبیعی صفر است. ص ☐ غ ☐
- تمام مضرب‌های عدد ۷ مرکب هستند. ص ☐ غ ☐
- تمام اعداد اول دو رقمی هستند. ص ☐ غ ☐
- کوچکترین عدد اول سه رقمی ۱۰۱ است. ص ☐ غ ☐
- عدد ۲۲۳ بر ۳ بخش‌پذیر است ص ☐ غ ☐
- ۵۱ عددی اول است. ص ☐ غ ☐
- تمام اعداد اول فرد هستند. ص ☐ غ ☐
- عدد ۵۹×۳۱ عددی اول است. ص ☐ غ ☐
- ۵۹ عددی اول است. ص ☐ غ ☐

- عدد ۹۱ عددی مرکب است. ص ☐ غ ☐
- هر عددی که بیش از دو مقسوم‌علیه داشته باشد عددی مرکب است. ص ☐ غ ☐
- تنها مقسوم علیه اول عدد ۱۱ خود ۱۱ است. ص ☐ غ ☐
- عدد ۱۲ را می‌توان به صورت حاصلضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از یک نوشت. ص ☐ غ ☐
- عدد ۲ هم زوج است، هم اول. ص ☐ غ ☐

۳) با کمک روش الگوریتم غربال اعداد اول بین ۹۵ تا ۱۱۵ را مشخص کنید.

٤) هر یک از جملات زیر را با کلمه‌ای مناسب پر کنید.

- تنها عدد اول زوج .... است.
- هر عدد طبیعی که فقط دو مقسوم‌علیه داشته باشد عددی .... است.
- ٤۹ عددی .... است.
- تنها مقسوم علیه اول هر عدد اول .... است.
- تنها عددی که نه اول است نه مرکب .... است.

۵) در مجموعه زیر اعداد اول را مشخص کنید.

{۵۱,۹۱,۶۳,۹۷,۱۲۱,۸۳}

٦) با توجه به مجموعه زیر اعداد مرکب را مشخص کنید.

{۱۷,۲۷,۳۷,۴۷,۵۷,۶۷}

۷) بین ۷۳ و ۹۳ چند عدد اول وجود دارد؟ (با روش غربال)

۸) هر یک از عبارت‌های ستون سمت راست را به عدد مناسب از ستون سمت چپ وصل کنید.

ستون سمت راست	ستون سمت چپ
عددی اول است	۹۱
هم زوج است هم مرکب	۲
	۱۲

بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد (معروف به ب.م.م)

بزرگترین عددی که دو عدد طبیعی a و b بر آن بخش پذیرند ، بزرگترین مقسوم علیه مشترک آن دو عدد گفته می شود.

- ✓ (ب.م.م) دو عدد a و b را با نماد (a و b) نشان می دهیم.

به عنوان مثال دو عدد ۴۲ و ۳۵ را در نظر بگیرید ، این دو عدد بر بزرگترین شمارنده خودشان یعنی عدد ۷ بخش پذیر هستند. پس عدد ۷ را (ب.م.م) این دو عدد می نامیم.

یا دو عدد ۱۶ و ۲۴ را در نظیر بگیرید ، با کمی دقت متوجه می شویم که این دو عدد بر بزرگترین شمارنده خودشان یعنی عدد ۸ بخش پذیر هستند. پس عدد ۸ (ب.م.م) این دو عدد می باشد.

نکته بسیار مهم : (ب.م.م) دو عدد اول همیشه (۱) یک است.

کوچکترین مقسوم علیه مشترک دو عدد (معروف به ک.م.م)

کوچکترین عدد طبیعی که هم بر عدد طبیعی a و هم بر عدد طبیعی b بخش پذیر می باشد را کوچکترین مقسوم علیه مشترک دو عدد گفته می شود.

- ✓ **(ک.م.م) دو عدد a و b را با نماد [a و b] نشان می دهیم.**

- ✓ **برای بدست آوردن (ک.م.م) دو عدد ، کافی است که آن دو عدد را در هم ضرب نموده و بر (ب.م.م) شان تقسیم کنیم.**

به عنوان مثال دو عدد ۳۵ و ۴۲ را در نظر بگیرید ، برای بدست آوردن (ک .م.م) ، این دو عدد را در هم ضرب نموده ۱۴۷۰ = ۴۲ × ۳۵ و بر بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان یعنی عدد ۷ تقسیم می کنیم و حاصل عدد ۲۱۰ می شود.

تمرین : (ک.م.م) دو عدد [۳۰۰ و ۱۵۰] را بدست آوردید.

تمرین : (ب.م.م) و (ک.م.م) های خواسته شده را بدست آورید.

[۴ و ۱۲] =	(۳ و ۱۵)=	(۷ و ۵) =	(۳۰ و ۲۰)=
(۹ و ۴) =	[۱۵ و ۳۰]=	(۱۹ و ۳۸)=	[۵۰ و ۳۰] =
[۶ و ۴]=	(۷ و ۲ و ۳)=	[۷ و ۲ و ۳]=	[۹ و ۴]=

- نکته : حاصل ضرب (ک.م.م) دو عدد در (ب.م.م) آنها برابر با حاصل ضرب آن دو عدد می باشد.
- نکته : برای محاسبه (ب.م.م) دو عدد که به حاصل ضرب عوامل اول تجزیه شده اند حاصل ضرب عوامل مشترک با کمترین توان را می نویسیم. همچنین برای محاسبه (ک.م.م) آنها ، حاصل ضرب عوامل مشترک و غیر مشترک را با بیشترین توان را می نویسیم.

مثال : (ب.م.م) و (ک.م.م) دو عدد A و B با مشخصات زیر را بنویسید.

$$B = ۲^{۲} \times ۵^{۳} \times ۳ \times ۷ \quad و \quad A = ۲^{۳} \times ۵ \times ۷^{۴}$$

برای بدست آوردن (ب.م.م) دو عدد بالا ، همانطور که در نکته بالا گفته شده ، عوامل مشترک با توان کمتر را در هم ضرب می کنیم :

$$۲^{۲} \times ۵ \times ۷$$

برای بدست آوردن (ک.م.م) دو عدد بالا هم ، عوامل مشترک و غیر مشترک را با توان های بیشتر در هم ضرب می کنیم :

$$۲^{۳} \times ۵^{۳} \times ۷^{۴} \times ۳$$

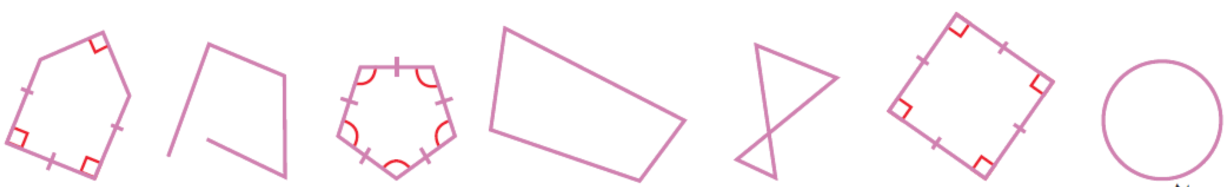
تمرین : (ب.م.م) و (ک.م.م) دو عدد E و D با مشخصات زیر بنویسید.

$$E = ۲^{۲} \times ۷^{۳} \times ۵^{۲} \quad و \quad D = ۲^{۳} \times ۷^{۲} \times ۵^{۳}$$

فصل ۳
چند ضلعی ها

چند ضلعی

در صفحه به هر خط شکسته بسته ، چند ضلعی گفته می شود به شرط آنکه ضلع ها یکدیگر را قطع نکنند ؛ مگر در رأس ها که دو ضلع به هم می رسند .



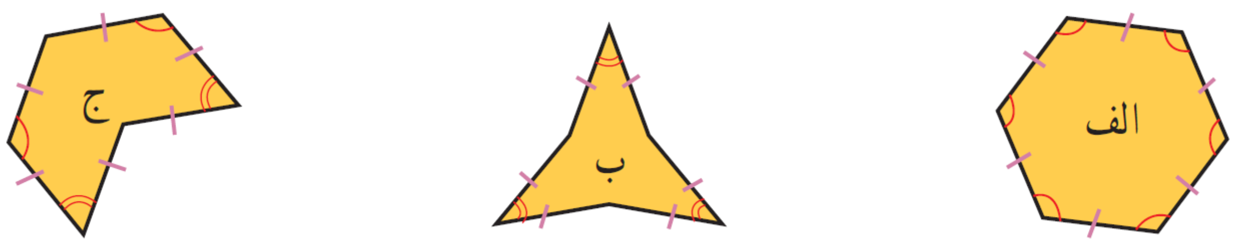
- ✓ **شکل (ج) چند ضلعی نیست . چرا ؟ چون ضلع های آن یکدیگر را قطع کرده اند .**
- ✓ **شکل (و) چند ضلعی نیست . چرا ؟ چون خط شکسته بسته نمی باشد .**
- ✓ **شکل (الف) چند ضلعی نیست . چرا ؟ چون خط شکسته نمی باشد .**

- **اگر در یک چند ضلعی همه ضلع ها با هم و همه زاویه ها با هم مساوی باشند ، می گوییم آن چند ضلعی منتظم است.**

چند ضلعی محدب و مقعر

- چند ضلعی محدّب (کوژ) : چند ضلعی که زاویه های آن کوچکتر از ۱۸۰ درجه باشد.
- چند ضلعی مقعر (کاو) : چند ضلعی که دست کم یک زاویه ی آن بزرگتر از ۱۸۰ درجه باشد .
- چند ضلعی منتظم : چند ضلعی که دارای ضلع ها و زاویه های مساوی باشد .

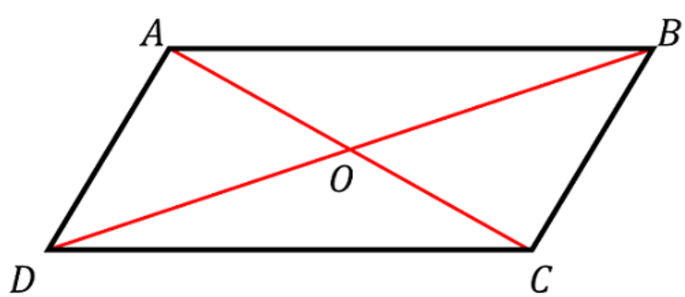
مثال : با توجه به شکل های زیر جدول کامل شده را مشاهده و درکلاس بحث نمایید.



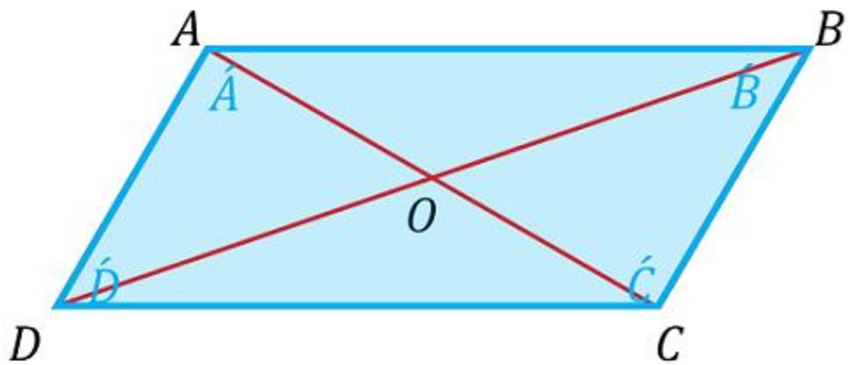
شکل	منتظم	غیر منتظم	محدّب	مقعر
الف	✓	✗	✓	✗
ب	✗	✓	✗	✓
ج	✗	✓	✗	✓

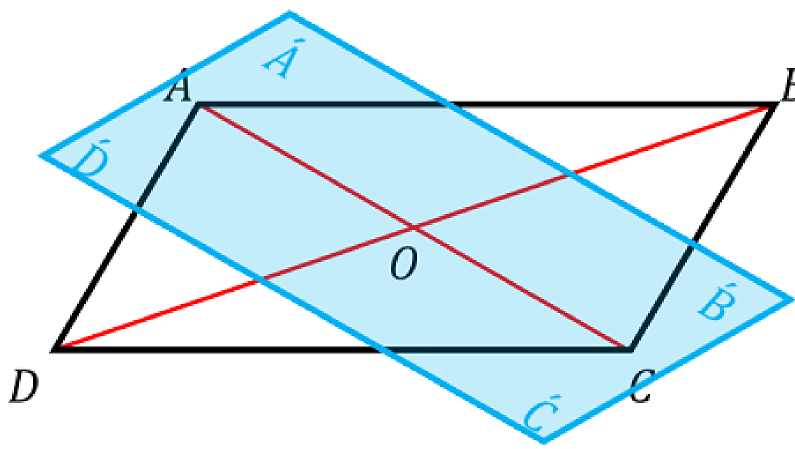
دوران ۱۸۰ درجه یک چند ضلعی حول مرکز تقارن

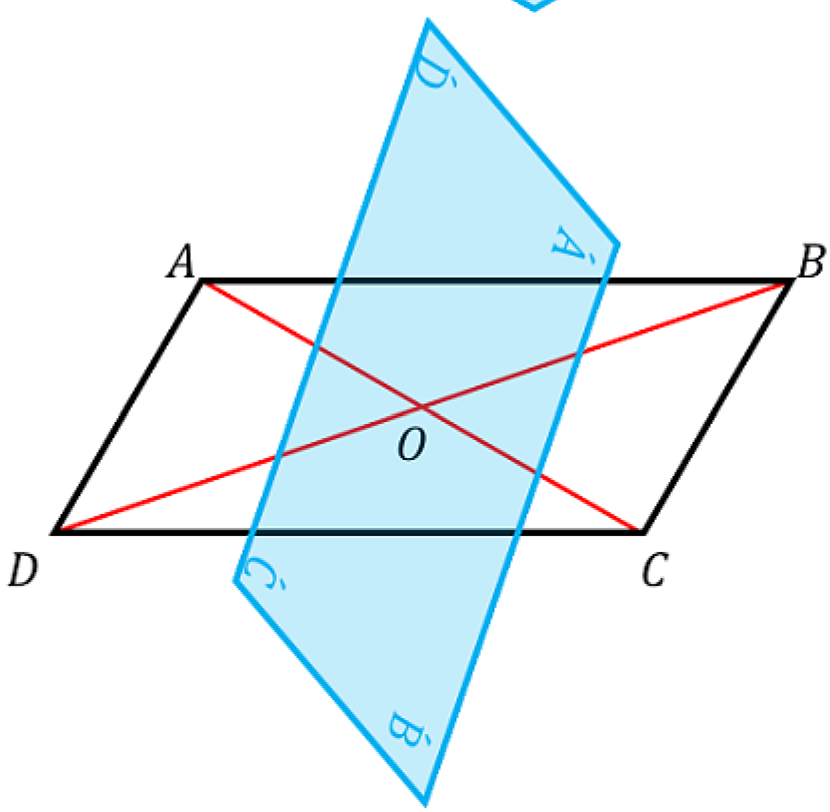
در شکل زیر می خواهیم یک متوازی الاضلاع را حول نقطه ی محل برخورد قطر های آن ، یعنی نقطه O به اندازه ۱۸۰ بچرخانیم و دوران دهیم.

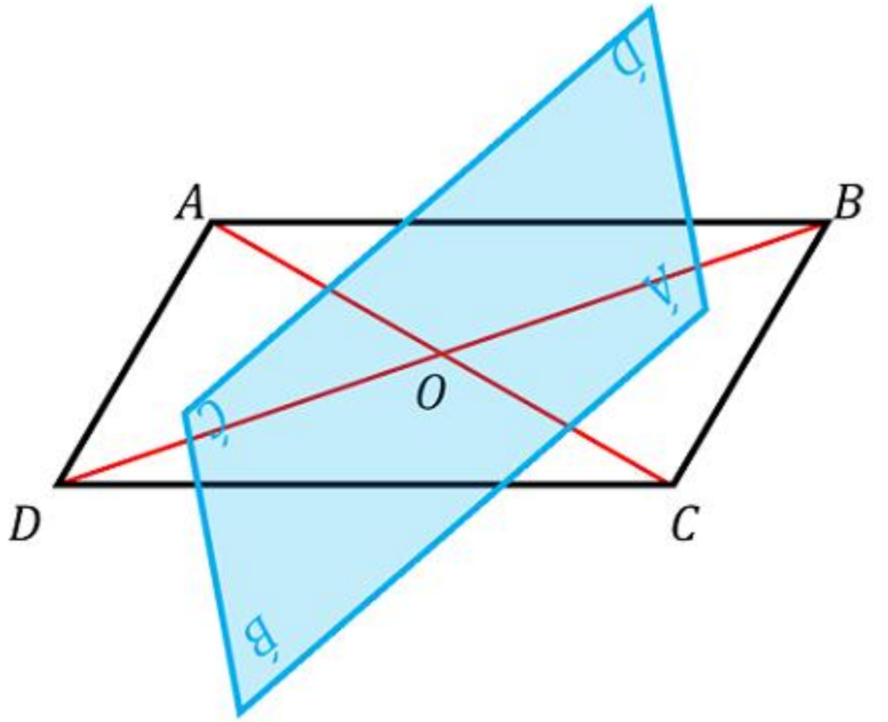


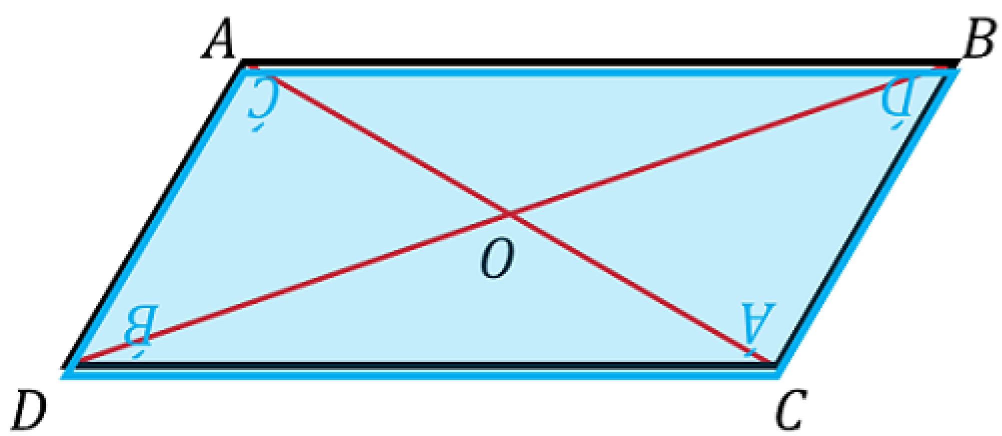
به مراحل زیر توجه نمایید و در مورد آن در کلاس بحث نمایید.









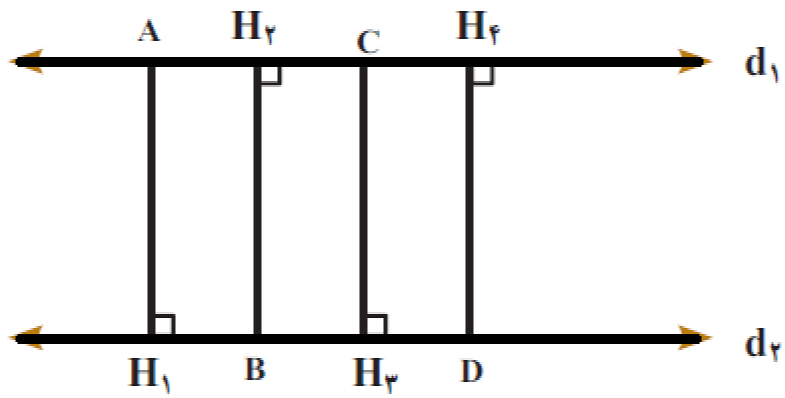


اگر نتیجهٔ دوران ۱۸۰ درجه‌ای یک شکل حول یک نقطه روی آن منطبق شود، می‌گوییم شکل مرکز تقارن دارد و نقطهٔ مورد نظر، مرکز تقارن شکل است.

در شکل های بالا ، نقطه O ، مرکز دوران متوازی الاضلاع ABCD می باشد.

خطوط موازی

دو خط واقع بر یک صفحه را موازی می گوییم هر گاه آن دو خط بر هم منطبق باشند و یا هیچ نقطه ی مشترکی نداشته باشند .مانند دو خط d_1 و d_2 که با هم موازیند.

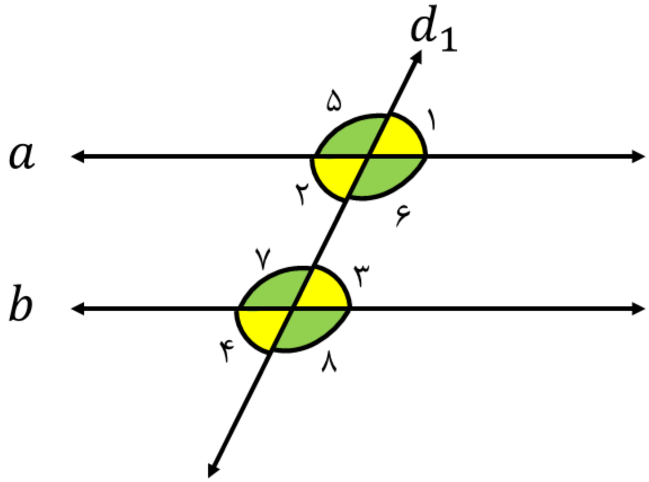


- ✓ همانطور که در شکل بالا مشاهده می کنیم ، نقاط A و C فواصل یکسانی را از نقاط B و D دارند.
- ✓ در واقع در شکل بالا تمامی نقاط مشخص شده روی دو خط در فواصل یکسانی نسبت به هم قرار گرفته اند.

❖ در شکل زیر ، دو خط a و b موازی هستند .

$$a \parallel b$$

❖ به خط d_1 خط مورب می گویند.

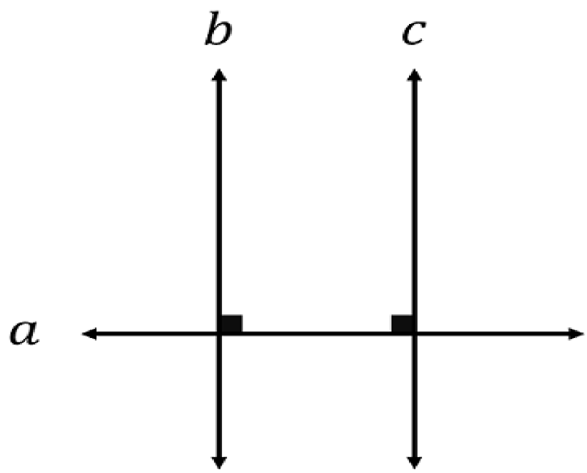


- ✓ **هر خطی که دو خط موازی را قطع کند ، با آن ها زاویه مساوی می سازد.**

- ❖ **زاویه های تند با هم برابر هستند** $\hat{1} = \hat{2} = \hat{3} = \hat{4}$
- ❖ **زاویه های باز با هم برابر هستند** $\hat{5} = \hat{6} = \hat{7} = \hat{8}$

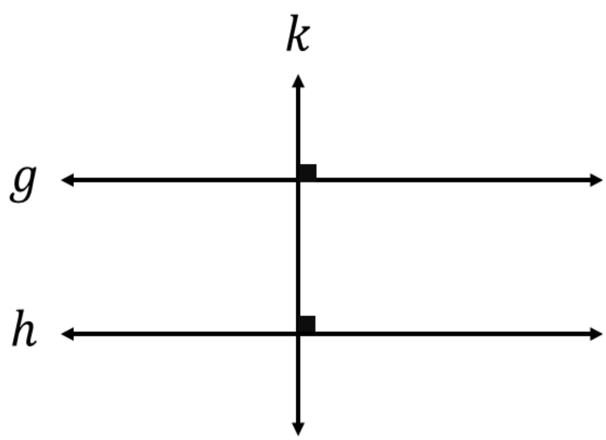
تعامد (عمود بودن)

- ➢ **دو خط عمود بر یک خط با هم موازی هستند.**



$$\left.\begin{matrix} b \perp a \\ c \perp a \end{matrix}\right\} \Longrightarrow b \parallel c$$

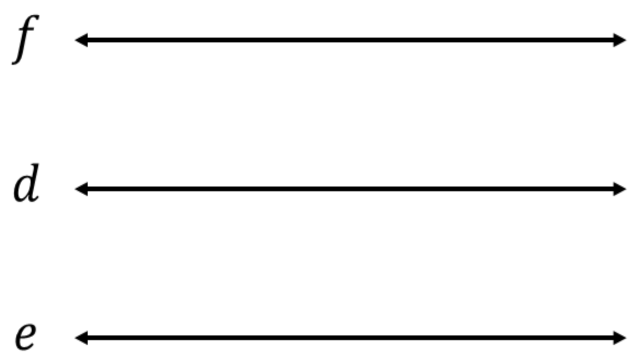
- ➢ **اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد بر دیگری نیز عمود است.**



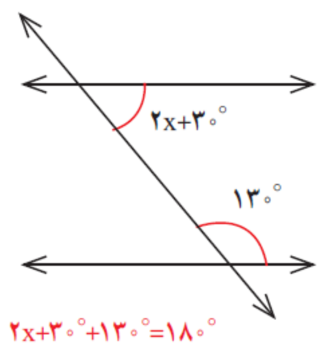
$$\left.\begin{matrix} g \parallel h \\ k \perp h \end{matrix}\right\} \Longrightarrow k \perp g$$

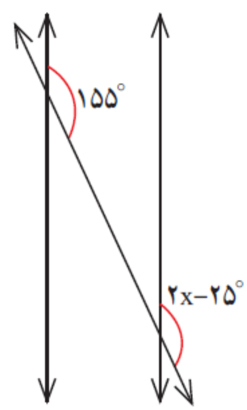
➢ دو خط موازی با یک خط با هم موازی اند.

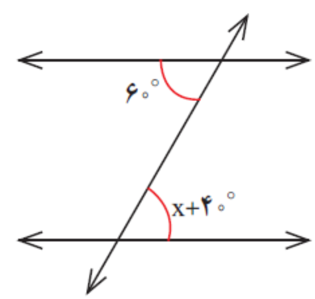
$$\left.\begin{aligned} d \parallel e \\ d \parallel f \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad e \parallel f$$



تمرین : مانند نمونه حل شده ، مقدار x را بیابید.







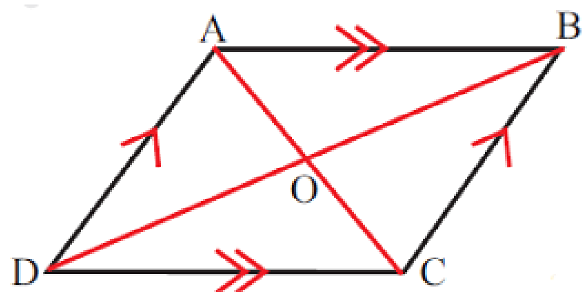
چهار ضلعی های مهم

متوازی الاضلاع

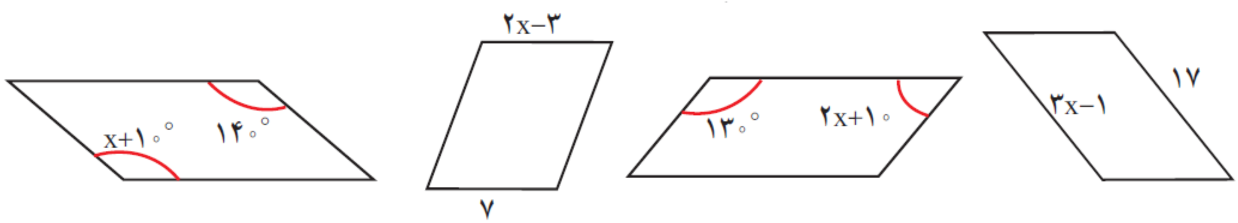
✓ چهار ضلعی است که اضلاع آن دو به دو موازی باشند.

✓ در هر متوازی الاضلاع زاویه های مجاور مکمل اند و زاویه های مجاور مقابل مساویند .

- ✓ در هر متوازی الاضلاع ضلع های مقابل با هم برابرند.
- ✓ در هر متوازی الاضلاع قطر ها یکدیگر را نصف می کنند.

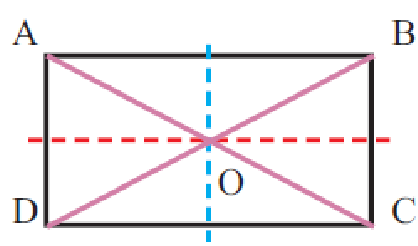


تمرین : شکل های زیر متوازی الاضلاع هستند ، با تشکیل معادله مقدار x را بیابید.



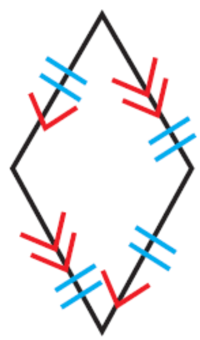
مستطیل

- ✓ چهار ضلعی که تمام زاویه های آن قائمه باشد به عبارت دیگر مستطیل متوازی الاضلا عی است که یک زاویه ی قائمه داشته باشد .
- ✓ چون مستطیل نوعی متوازی الاضلاع است پس تمام خواص متوازی الاضلاع را داراست .
- ✓ قطر های مستطیل با هم برابرند.



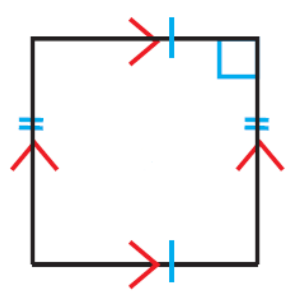
لوزی

- چهار ضلعی که چهار ضلع آن مساوی باشند لوزی است .
- چون لوزی نوعی متوازی الاضلاع است پس همه ی خواص متوازی الاضلاع را داراست.
- قطرهای لوزی بر هم عمودند.
- هر قطر لوزی نیمساز دو زاویه ی مقابل لوزی است .



مربع

- چهار ضلعی است که چهار ضلع آن مساوی و چهار زاویه ی آن قائمه هستند .
- بنابراین مربع هم نوعی لوزی، هم نوعی مستطیل و در نتیجه نوعی متوازی الاضلاع است. پس تمام خواص آن ها را داراست.

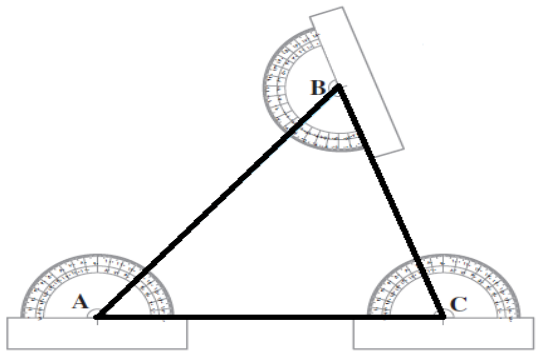


زاویه داخلی

زاویه هایی که درون یک چند ضلعی قرار دارند ، زاویه های داخلی آن چند ضلعی نامیه می شوند.

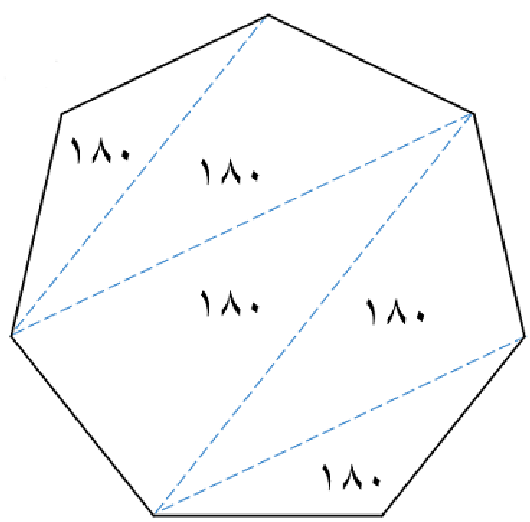
- مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر با ۱۸۰ درجه می باشد.

به عنوان مثال ، شکل زیر نشان می دهد که C =۷۰ و B = ۶۰ و A = ۵۰ می باشد. (مقادیر بر حسب درجه می باشند.) پس A + B + C =۱۸۰ می باشد.



- حال اگر تعداد اضلاع چند ضلعی ما بیشتر شد ، چگونه می توانیم مجموع زوایای داخلی آن چند ضلعی را محاسبه کنیم؟
- **به عنوان مثال** ، هفت ضلعی زیر را در نظر بگیرید ، مانند شکل ، آن را به چند مثلث تجزیه می کنیم. از آنجا که می دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است ، پس مجموع زوایای داخلی هر کدام از مثلث ها را با یکدیگر جمع می کنیم.

روش اول



$$۵ \times ۱۸۰^{\circ} = ۹۰۰^{\circ}$$

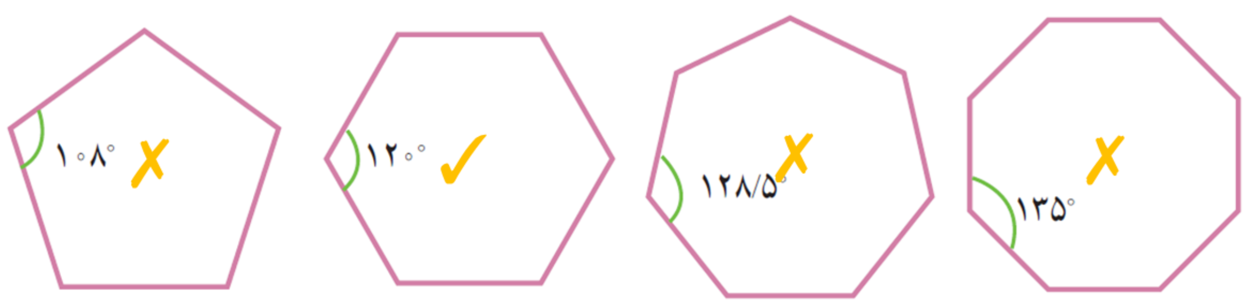
➢ **روش دوم**

مجموع زاویه های داخلی چند ضلعی = (تعداد اضلاع − ۲) × ۱۸۰

$$(۷ - ۲) \times ۱۸۰^{\circ} = ۹۰۰^{\circ}$$

تمرین : مجموع زوایای داخلی یک دوازده ضلعی منتظم را با استفاده از دو روش گفته شده در بالا بدست آورید.

یک نوع کاشی منتظم دیگر پیدا کنید که با آن بتوان کاشی کاری کرد.

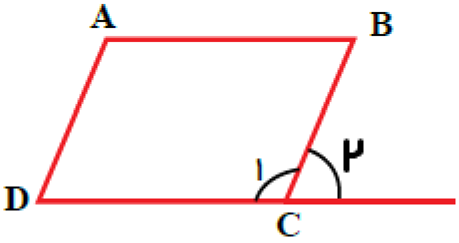


۳۶۰ ÷ ۱۳۵ ≃ ۲/$\overline{۶}$ ۳۶۰ ÷ ۱۲۸/۵ ≃ ۲/۸   ۳۶۰ ÷ ۱۲۰ = ۳   ۳۶۰ ÷ ۱۰۸ ≃ ۳/$\overline{۳}$

➢ **نکته : تنها چند ضلعی هایی که زاویه ی داخلی آن ها شمارنده (مقسوم علیه) صحیح ۳۶۰ درجه است، برای کاشی کاری مناسب هستند.**

زاویه خارجی

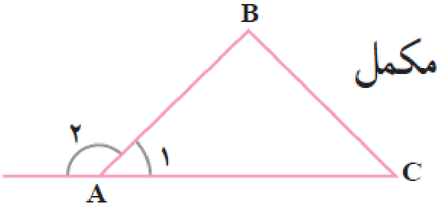
در شکل زیر ضلع DC در خارج از چهار ضلعی ABCD امتداد داده شده است و با ضلع BC تشکیل زاویه ای به نام C_2 را می دهد که به این زاویه ، زاویه خارجی می گویند که مجموع آن با زاویه C_1 برابر با ۱۸۰ درجه میشود. پس دو زاویه C_1 و C_2 مکمل یکدیگر هستند.



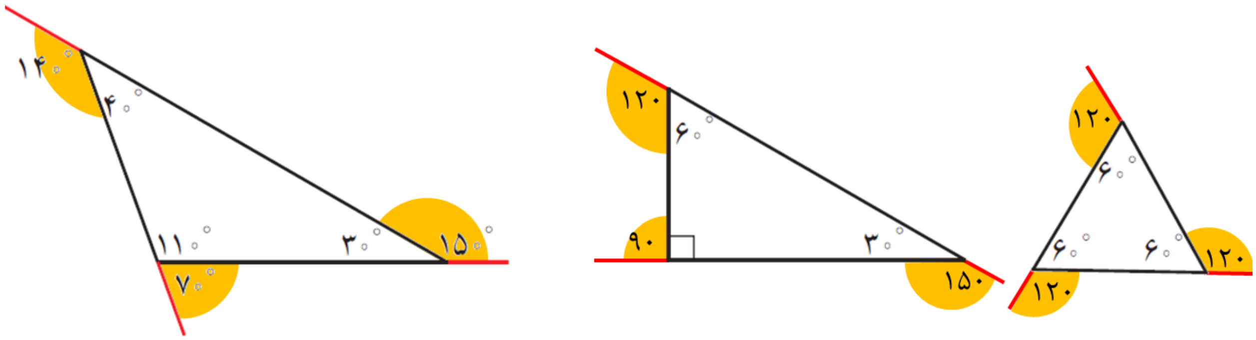
نکته بسیار مهم : به طور کلی در هر مثلث ، اندازه هر زاویه خارجی از مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن بدست می آید.

به عنوان مثال در شکل زیر ، زاویه A_2 از مجموع دو زاویه B و C بدست می آید.

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ & \text{مجموع زاویه‌های مثلث} \\ \hat{A}_1+\hat{A}_2=180^\circ & \text{زاویه‌های مکمل} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_2=\hat{B}+\hat{C}$$



✓ مجموع زاویه های خارجی مثلث برابر ۳۶۰ درجه می باشد.



$۱۲۰^\circ + ۱۲۰^\circ + ۱۲۰^\circ = ۳۶۰^\circ$ $\qquad$ $۱۲۰^\circ + ۹۰^\circ + ۱۵۰^\circ = ۳۶۰^\circ$ $\qquad$ $۱۴۰^\circ + ۷۰^\circ + ۱۵۰^\circ = ۳۶۰^\circ$

❖ **حال اگر تعداد اضلاع زیاد شود و ما یک n ضلعی داشته باشیم ، چطور می توانیم مجموع زوایای خارجی آن n ضلعی را حساب کنیم؟**

❖ **با استفاده از فرمول های زیر می توانیم ، موارد اشاره شده در این فرمول ها را محاسبه کنیم.**

مجموع زاویه‌های داخلی و خارجی n ضلعی $= n \times ۱۸۰ = ۱۸۰\, n$

مجموع زاویه‌های داخلی n ضلعی $= (n-۲) \times ۱۸۰ = n \times ۱۸۰ - ۲ \times ۱۸۰ = ۱۸۰n - ۳۶۰$

مجموع زاویه‌های خارجی n ضلعی $= ۱۸۰\, n - (۱۸۰n - ۳۶۰) = ۱۸۰n - ۱۸۰n + ۳۶۰ = ۳۶۰^\circ$

تمرین : اندازه زاویه های خارجی و داخلی یک هشت ضلعی منتظم را بدست آورید.

فصل ۴ جبر و معادله

عبارت‌های جبری

به عبارت $۳+۲$ توجه کنید، می‌توان به جای عدد ۲ و ۳ از حروف انگلیسی استفاده کرد. در این صورت عبارت به شکل a+b تبدیل می‌شود. شما در سال قبل با عبارت‌هایی مثل عبارت‌های زیر آشنا شده‌اید.

$$-۲c-۴c=(-۲-۴)c=-۶c \qquad ۳a+۵a=(۳+۵)a=۸a$$

$$۳k-۹k=(۳-۹)k=-۶k \qquad ۸b-۳b=(۸-۳)b=۵b$$

توجه مهم:	$۳a\equiv ۳\times a$	$۲(۵b)\equiv ۲\times ۵b=۱۰b$

- یک جمله‌ای: در عبارت جبری $۳-۵a+۲b-$ به هر کدام از $-۵a$، $۲b$ و -۳ یک جمله است.
- یک جمله‌ای‌های متشابه: یک جمله‌ای‌هایی که قسمت حرفی آنها مانند هم و توان‌های یکسان باشند، یک جمله‌ایهای مشابه هستند.
- چند جمله‌ای: به مجموع چند یک جمله‌ای، چند جمله‌ای گفته می‌شود. مانند: $-۲a+۳b-۳a-۲۱b$

✓ *نکته: یک جمله‌ای $۲a$ را در نظر بگیرید، به ۲ ضریب یک جمله‌ای یا ضریب **a** گویند و به **a** قسمت حرفی یا متغیر گویند و توان این یک جمله‌ای «یک» می‌باشد.*

✓ *نکته: در جمع و تفریق عبارت‌های جبری، فقط جملات متشابه را می‌توان با هم جمع و یا از هم کم کرد. به این ترتیب که قسمت حرفی آنها را نوشته و ضرایب آنها را با هم جمع و یا تفریق می‌کنیم.*

✓ نکته: برای ساده کردن یک عبارت جبری جمله‌های متشابه را با هم ساده می‌کنیم.

✓ نکته: در ضرب یک عدد در چند جمله‌ای، آن عدد را در تک تک جمله‌ها ضرب می‌کنیم.

مثال : عبارت زیر را ساده کنید.

$$۲a+۶b-۳a-۱۱b$$

حل: طبق تعریف یک جمله‌ای‌های متشابه دو جمله $۲a$ و $-۳a$ با هم متشابه و دو جمله $۶b$ و $-۱۱b$ هم با یکدیگر متشابه هستند. پس داریم:

$$a(۲-۳)+b(۶-۱۱)=-a-۵b$$

مثال: به مثال‌های زیر در مورد ضرب یک عدد در یک جمله‌ای و چند جمله ای توجه کنید:

$$۳\times۲x=۶x$$
$$۱۲\times(-۲t)=-۲۴t$$
$$۴(۵e-۳r)=۲۰e-۱۲r$$

یک مثال مهم

در پارکی دوچرخه کرایه می دهند. هزینه ثابت کرایه یک دوچرخه ۵۰۰ تومان است. برای هر ساعت هم ۲۰۰ تومان می‌گیرند. فرض کنید شخصی دوچرخه را برای n ساعت کرایه کرده است. هزینه او را با یک عبارت جبری نمایش دهید. اگر او دوچرخه را برای ٤ ساعت کرایه کند چقدر باید بپردازد؟

حل : چون هزینه یک ساعت کرایه دوچرخه ۲۰۰ تومان است، پس هزینه n ساعت کرایه برابر 200n می‌شود. از طرفی چون کرایه کردن دوچرخه مبلغ ۵۰۰ تومان کرایه ثابت دارد پس عبارت جبری برابر می‌شود با:

$$۲۰۰n+۵۰۰$$

حال اگر این شخص برای ٤ ساعت دوچرخه کرایه کرده باشد کافیست به جای n در عبارت جبری عدد ٤ را گذاشت و مبلغی که شخص باید بپردازد را حساب کرد. پس داریم:

$$۲۰۰n+۵۰۰=۲۰۰\times۴+۵۰۰=۸۰۰+۵۰۰=۱۳۰۰$$

پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری

عبارت 4a را در نظر بگیرید. اگر جای a عدد ۳ را بگذاریم، مقدار ۱۲=۳×۴ بدست می‌آید. مقدار عددی 4a به ازای $a=۳$ برابر است با ۱۲. همین طور مقدار عددی عبارت $-b+۴$ به ازای $b=-۳$ برابر است با $۷=۴+(-۳)-$.

مثال : مقدار عددی عبارت‌های زیر را به ازای مقادیر داده شده حساب کنید؟

$$\begin{cases} ۳b-۳ \\ b=-۳ \end{cases} \Rightarrow\ ۳\times(-۳)-۳=-۹-۳=-۱۲$$

$$\begin{cases} y+۳ \\ y=۱ \end{cases} \Rightarrow\ ۱+۳=۴$$

$$\begin{cases} \frac{۱}{۳}v-۵ \\ v=۳ \end{cases} \Rightarrow\ \frac{۱}{۳}\times۳-۵=\frac{۳}{۳}-۵=۱-۵=-۴$$

- عبارت $ax+۶$ را در نظر بگیرید، مقدار عددی آن به ازای $a=۲$ و $x=۳$ مساوی است با :

$$ax+۶=۲\times۳+۶=۱۲$$

- همچنین عبارت $y^۲-y$ را در نظر بگیرید، مقدار عددی آن به ازای $y=-۲$ مساوی است با :

$$y^۲-y=(-۲)^۲-(-۲)=۴+۲=۶$$

✓ نکته : هرگاه یک عدد منفی به توان یک عدد زوج مانند ۲،٤، ٦ و ... برسد، حاصل یک عدد مثبت می‌شود.

✓ مثال : $(-۲)^۴=+۱۶$

✓ نکته: هرگاه یک عدد منفی به توان یک عدد فرد مانند ۱،۳، ٥ و ... برسد، حاصل یک عدد منفی می‌شود.

✓ مثال : $(-۲)^۳=-۸$

مثال : مقدار عددی عبارت‌های زیر را به ازای مقادیر داده شده حساب کنید؟

$$\begin{cases} ab-۳ \\ b=-۳ \Rightarrow ۲\times(-۳)-۳=-۶-۳=-۹ \\ a=۲ \end{cases}$$

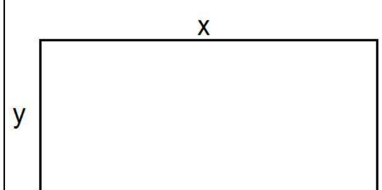
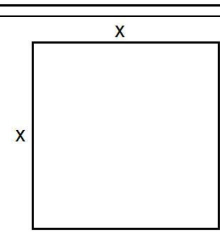
$$\begin{cases} ay^{۲}+۳ \\ y=۳ \quad \Rightarrow \quad -۱\times ۳^{۲}+۳=-۹+۳=-۶ \\ a=-۱ \end{cases}$$

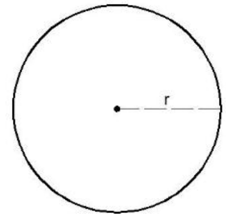
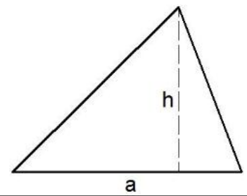
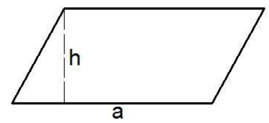
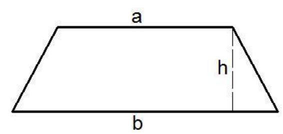
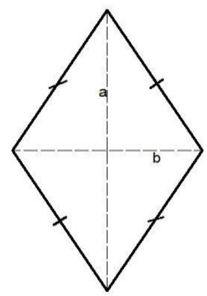
$$\begin{cases} av-x \\ v=۳ \\ a=۲ \\ x=-۵ \end{cases} \Rightarrow \ ۲\times ۳-(-۵)=۶+۵=۱۱$$

$$\begin{cases} ax^{۳}-۲y \\ x=۳ \\ a=-۲ \\ y=۰ \end{cases} \Rightarrow \ -۲\times(۳)^{۳}-۲\times ۰=-۲\times ۲۷-۰=-۵۴$$

مساحت اشکال هندسی

در جدول زیر مساحت اشکال هندسی پرکاربرد را ملاحظه می‌کنید.

شکل هندسی	مساحت به زبان شیرین فارسی	مساحت بر حسب عبارات جبری
	طول × عرض	$S=x\times y$
	یک ضلع × خودش	$S=x\times x=x^{۲}$

	شعاع × شعاع × ۳/۱۴	$S = \pi \times r \times r = \pi r^۲$
	(ارتفاع × قاعده) تقسیم بر ۲	$S = \frac{a \times h}{۲}$
	ارتفاع × قاعده	$S = a \times h$
	(مجموع دو قاعده × ارتفاع) تقسیم بر ۲	$S = \frac{(a+b) \times h}{۲}$
	حاصلضرب دو قطر تقسیم بر ۲	$S = \frac{a \times b}{۲}$

ساده کردن یک عبارت جبری

عبارت جبری $۲xy - ۳x^۲y - ۷$ یک چند جمله‌ای است. این چند جمله‌ای سه جمله دارد که عبارتند از: $۲xy$، $-۳x^۲y$ و -۷. عبارت $-۳x^۲y$ یک تک جمله‌ای است. $x^۲y$ قسمت حرفی این تک جمله و این -۳ ضریب عددی آن است.

دو تک جمله‌ای که قسمت حرفی یکسان دارند متشابه نامیده می شوند. مثلاً دو تک جمله‌ای $۳xy$ و $-xy$ متشابه هستند ولی دو تک جمله‌ای $-۳xz$ و $۳x^۲$ متشابه نیستند. برای ساده کردن یک عبارت جبری جمله های متشابه را با هم جمع می‌کنیم.

مثال :

$$-۳x^۲y+۴-۳x+۵x^۲y-۱۱+۷x=۲x^۲y-۴x-۷$$

مثال : عبارت‌های زیر را ساده کنید؟

$$-\frac{۲}{۳}(۴b)=-\frac{۲\times۴}{۳}b=-\frac{۸}{۳}b$$

$$(-\frac{۱}{۲}a)(-۲b)=-\frac{-۲}{۲}b=b$$

$$(-x)(-x)=x^۲$$

توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع و تفریق

برای ضرب یک عدد یا یک حرف در یک چند جمله‌ای، باید آن عدد یا حرف را در تمامی جملات چند جمله‌ای ضرب کرد. در حالت کلی داریم : $\begin{matrix} a(b+c)=ab+ac \\ a(b-c)=ab-ac \end{matrix}$ این تساوی‌ها توزیع ضرب را نسبت به جمع و تفریق نشان می‌دهد. با استفاده از این دو خاصیت می‌توان عبارت‌های جبری را ساده کرد.

مثال :

$$۲(x+y)=۲x+۲y$$

$$-۳a(b-۴)=-۳ab+۱۲a$$

✓ *نکته: برای تقسیم دو یک جمله‌ای ضرایب را بر هم تقسیم و در قسمت حرفی از قواعد تقسیم اعداد تواندار استفاده کنید. مثال:*

$$\frac{۱۵x^۲y}{۳x}=۵xy \quad ✓$$

✓ *نکته: برای تقسیم یک چند جمله‌ای بر یک یک جمله کافیست تک تک جمله‌ها را بر یک جمله‌ای تقسیم کرد. در حالت کلی داریم:*

$$\frac{a+b-c}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d} \quad ✓$$

توزیع‌پذیری جمع نسبت به جمع

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

نوشتن یک عبارت جبری به صورت حاصلضرب دو عبارت جبری

برای ذکر این مطلب به مثال زیر توجه کنید.

مثال : عبارت $۳a+ab$ را به صورت حاصلضرب دو عبارت جبری بنویسید؟

برای حل مسائلی از این دست باید از فاکتورگیری استفاده کنیم. حال ببینیم فاکتورگیری چیست.

در چند جمله‌ای $۳a+ab$ که از دو یک جمله‌ای $۳a$ و ab تشکیل شده است، حرف a در یک جمله‌ایها مشترک است. پس می‌توانیم حرف a را بر تک تک جمله ها تقسیم کنیم، در اصل از حرف a فاکتور گرفته‌ایم. در حالت کلی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{۳a}{a}+\frac{ab}{a}=a(۳+b)$$

اگر حاصل‌ضرب عبارت $a(۳+b)$ را بدست آوریم به عبارت $۳a+ab$ می‌رسیم.

پس برای فاکتورگیری کافیست: عامل مشترک در یک جمله‌ای‌ها را پیدا کرده و آن را بر تک تک، یک جمله‌ای‌ها تقسیم کرده تا حاصل به صورت دو عبارت جبری‌ای که در هم ضرب شده اند درآیند.

مثال : عبارت $۴a^۲+۲ab$ را به صورت ضرب دو عبارت جبری بنویسید.

در چند جمله‌ای بالا که از دو جمله تشکیل شده است عبارت $۲a$ مشترک است پس هر کدام از جمله‌ها را بر $۲a$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۴a^۲}{۲a}+\frac{۲ab}{۲a}=۲a(۲a+b)$$

❖ ***تمرین در کلاس***

۱) تساوی های زیر را کامل کنید.

$۲۳a+۱۲a-۴۰a=$ $\qquad$ $۵t-۱۱t=$ $\qquad$ $۳x-۲x=$

$۱۲p-۱۰p=$ $\qquad$ $-۲u+۲u=$ $\qquad$ $-۳b+۴b=$

$\frac{۳}{۸}h-\frac{۲}{۸}h+\frac{۹}{۸}h=$ $\qquad$ $b-۲b=$ $\qquad$ $\frac{-۲}{۴}a+a\frac{۱}{۹}=$

۲) عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$$۲a - ۳b - ۶a + ۱۱b =$$

$$۱۵x + ۸y - ۲y =$$

$$q - ۲q + ۳e - ۱۲w =$$

$$\frac{۲}{۵}b - \frac{۳}{۵}a + \frac{۴}{۵}a =$$

$$۵ \times ۳u - ۳ \times ۴u =$$

$$۴ \times \frac{۳}{۵}b + ۱۲ \times \frac{۳}{۴}a - \frac{۱}{۴}a =$$

۳) حاصل جمع و تفریق زیر را حساب کنید.

$$\begin{array}{r} (۳y - ۶u - ۵c) \\ \underline{-(-y + ۳u + ۲c)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (۳x + ۲y - c) \\ \underline{+(-x + ۳y + ۲c)} \end{array}$$

٤) جملات درست و غلط را مشخص کنید.

- عبارتهای $-۳ab^۲$ و $۳a^۲b$ متشابه هستند.
- عبارت $-۳a + ۵ab$ یک عبارت دو جمله‌ای است.
- دو جمله‌ی $\frac{-۲}{۷}xy$ و $-\frac{۲}{۷}xy^۲$ متشابه هستند.
- اگر a و b طول و عرض یک مستطیل باشند رابطه $۲(a+b)$ نشان دهنده محیط مستطیل است.
- مقدار عددی عبارت $(-x+۱)^۷$ به ازای $x = ۲$ برابر -۱ است.

۵) عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$۲x - ۴y + ۲ - ۵y + ۱۱x =$

$۲xyc - ۲y - ۴xyc + ۲ =$

$۱۱m^۲ - ۲۲n^۳ + ۳mn - ۴m^۲ + ۲n^۳ =$

٦) ضرب های زیر را انجام دهید.

$-۳(۹x) =$

$-۱۱(-۴xy) =$

$۲x(۳ + y) =$

$۲xyc(۲x + ۴y) =$

$۳a(-۲d + ۷b) =$

$(۲x - y)(۲ + y) =$

$(a + b)(a - b) =$

۷) هر یک از عبارت های زیر را ساده کنید.

$۵x(۲x - y) - ۱۰x^۲ + xy =$

$۴a(۳a - ۲b) - ۱۲a^۲ + ab =$

$۳x(۲xy - y) - ۶x^۲y + xy =$

$۳(۲x - y) - ۳(x + y) =$

$۲(۳x + ۵y) - ۳y - ۶x =$

$۳x(۲x - ۵y) - ۵x^{۲} - ۳ =$

$(۲x + ۲y)(۲x - ۲y) =$

$۲x - ۵)(۲x + ۵) =$

$a(۳a + b) + a^{۲} - ۲ab =$

$(x + ۵)(x - ۲) =$

$(m + n)^{۲} =$

$(x + ۳)^{۲} =$

$(x - ۵)^{۲} =$

$(x - ۷)^{۲} =$

۸) عبارت های زیر را به صورت حاصل ضرب دو عبارت جبری بنویسید.

$x^۲y - ۲x =$

$abc + ab^۲ =$

$acb^۲ - a^۲b =$

$۹a^۲b^۳ - ۶a^۳b^۲ =$

$۱۲ab - ۸bc =$

$۸ax^۲ - ۶a^۲x =$

۹) هر یک از عبارت های زیر را ساده کنید.

$(۲a - ۲b)^۲ =$

$(۳x - ۴)(۲x + ۴) =$

$(-۲ + ۴x)(۳x + ۲)^۲ =$

$(a + b)^۳ =$

$(۲x - ۴)^۳ =$

۱۰) مقدار عددی عبارت های جبری زیر را به ازای مقادیر داده شده به دست آورید.

$۴a^۲-۱ \qquad a=۳$

$-۳b^۲+۱ \qquad b=-۲$

$a^۲+۲b \qquad a=۲ \qquad b=-۳$

$۲x^۲-y^۲ \qquad x=۳ \qquad y=-۴$

$-۴a+b^۲a \qquad a=۲ \qquad b-۳$

$۶x-y^۳ \qquad x=-۱ \qquad y=-۲$

$۲ax+x^۲ \qquad x=۳ \qquad a=-۴$

$-۲xy+y^۲ \qquad x=-۳ \qquad y=۴$

$\frac{۱}{۵}x+y^۲ \qquad x=۵ \qquad y=-۲$

معادله

فرض کنید که یک ترازو داریم، که در یک کفه آن یک جرم ۱۰ کیلویی و در کفه دیگر آن یک جرم ۵ کیلویی و یک جسم دیگر که جرم آن را نمی‌دانیم قرار داده‌ایم. این ترازو به حال تعادل در آمده است. برای پیدا کردن جرم جسم نامعلوم (x) باید رابطه زیر را حل کنیم تا مشخص شود که جرم آن جسم چقدر است.

$$۵+x=۱۰$$

به عبارت جبری بالا یک معادله می‌گویند. در اصل دو طرف این تساوی با هم برابر است. برای بدست آوردن مقدار x یا همان حل معادله، ساده‌ترین راه این است گه بگوییم، چه عددی را با ۵ جمع کنیم تا حاصل ۱۰ شود. این کاملاً مشخص است، اگر به جای x عدد ۵ را بگذاریم، حاصل ۱۰ می شود که برابر طرف دیگر تساوی است.

✓ ساده ترین نوع معادله، معادله یک مجهولی است، که در آن مجهول دارای توان ۱ و ضریب ۱ است. شکل این معادله به صورت روبرو است : $x+a=b$ a و b اعداد گویا و x مجهول است.

✓ یادآوری: یک جمله‌ای ax^n را در نظر بگیرید. a ضریب یک جمله‌ای و x مجهول و n توان مجهول است.

روش حل معادله

در حالت کلی برای حل هرگونه معادله مراحل زیر را انجام دهید:

۱- در صورت وجود پرانتز عبارت جبری مورد نظر را محاسبه کنید.

$$۳(۲x-۱)=۹ \Rightarrow ۶x-۳=۹$$

۲- تمام مجهول‌ها را به یک سمت و تمام معلوم‌ها را به سمت دیگر تساوی ببرید. (توجه توجه : هر عدد یا حرف در صورتی که از یک سمت به سمت دیگر معادله منتقل شود، علامتش تغییر می‌کند)

$$۶x-۳=۹ \Rightarrow \quad ۶x=۹+۳ \quad \Rightarrow \quad ۶x=۱۲$$

۳- مقدار مجهول برابر است با مقدار معلوم تقسیم بر ضریب مجهول.

$$۶x=۱۲ \Rightarrow x=\frac{۱۲}{۶}=۲$$

نکته: به طرفین معادله می‌توان مقداری را اضافه یا کم کرد.

$$۳x+۷=۱۱ \quad \Rightarrow \quad ۳x+۷-۷=۱۱-۷ \quad \Rightarrow \quad ۳x=۴$$

نکته: طرفین یک معادله را می‌توان در عددی غیر صفر ضرب و یا تقسیم کرد. در معادله‌هایی که اعداد کسری به عنوان ضریب و یا عدد معلوم هستند، بهتر است طرفین معادله را در مخرج مشترک کسرها ضرب کرد.

$$\frac{۱}{۲}x+\frac{۲}{۳}=-۲ \Rightarrow \quad ۶\times(\frac{۱}{۲}x+\frac{۲}{۳}=-۲) \Rightarrow ۳x+۴=-۱۲ \quad \Rightarrow \quad ۳x=-۱۶$$

❖ تمرین در کلاس

۱) معادلات زیر را حل کنید.

$$-۳x=۱۲$$

$$-۵y=-۱۲$$

$$\frac{۲}{۳}c=-۴$$

$$۸x-۱۰=۱۲$$

$$۲x-\frac{۴}{۵}=۱$$

$$۲x-۸=-۶x$$

$$۴x-۳=-۱/۶$$

$$۹x+۳=-۴x$$

راهبرد تشکیل معادله

در سال گذشته آموختید که برای حل برخی از مسائل، می‌توان با راهبرد تشکیل معادله، معادله‌ای بنویسیم و پاسخ مسئله را بدست بیاوریم. با یک مثال این مورد را شرح می دهیم.

مثال : یک کارگر با حقوق ۳ هفته‌ای خود توانست یک بیل به قیمت ۳۸۰ تومان بخرد و ۴۰ تومان برایش باقی ماند. این کارگر به طور متوسط چقدر حقوق می‌گیرد؟
با توجه به این مسئله رابطه زیر را می توانیم بنویسیم:

(پول باقیماند) + (قیمت بیل) = (حقوق هفتگی) ۳×

اگر حقوق هفتگی را برابر مجهول x بگیریم معادله به شکل زیر در می‌آید:

$$۳x = ۳۸۰ + ۴۰$$

از حل معادله مقدار حقوق بدست می‌آید: $۳x = ۴۲۰ \Rightarrow \quad x = \frac{۴۲۰}{۳} = ۱۴۰$
پس حقوق این کارگر ۱۴۰ تومان در هفته است.

مثال : از ۵ برابر عددی ۳ تا کم می‌کنیم، عدد ۱۷ بدست می‌آید. آن عدد کدام است؟
عدد مورد نظر را x می گیریم، پس داریم:

$$۵x - ۳ = ۱۷ \quad \Rightarrow \quad ۵x = ۱۷ + ۳ \quad \Rightarrow \quad ۵x = ۲۰ \quad \Rightarrow \quad x = \frac{۲۰}{۵} = ۴$$

عددد مورد نظر ٤ است.

❖ **تمرین در کلاس**

۱) عرض مستطیلی ۵ سانتیمتر و محیط آن ۲۲ سانتیمتر است. طول آن را بدست آورید؟

۲) هفت برابر عددی به اضافه ی ۲ مساوی ۵۸ است. آن عدد کدام است؟

۳) $\frac{۳}{۴}$ عددی منهای $\frac{۱}{۲}$ همان عدد مساوی ۸− است. آن عدد کدام است؟

٤) پنج برابر عددی منهای ٤ مساوی است با خود آن عدد به اضافه‌ی ١٦. آن عدد کدام است؟

۵) اگر از سه برابر عددی ۲ واحد کم کنیم حاصل مساوی همان عدد است. آن عدد چیست؟

٦) اگر به چهار برابر عددی ۵ واحد اضافه کنیم، حاصل همان عدد می‌شود. آن عدد چیست؟

۷) برای معادلات زیر یک مساله بنوسید و آن را حل کنید.

$۳x + ۵ = ۶۲$

$۵x - ۷ = ۸$

$۳x - ۲ = ۱۸$

۸) معادلات زیر را حل کنید.

$۱۰x - ۱۵ = ۵x + ۲۰$

$۱۲x - ۱۰ = ۶x + ۳۲$

$۳x - ۷ = ۷x - ۳$

$۵x - ۳ = ۳x - ۱۷$

$۴x - ۱۰ = ۲۰ - ۲x$

$-۹x + ۵۱ = ۸۱x$

$-۳ - ۵x = ۲x + ۱۸$

$۱۲x + ۱۶ = -۴ + ۷x$

$۷x - ۱۵ = -۳x + ۳۵$

$۶x - ۵ = ۱۰x + ۷$

$۵x - ۷ = ۸x$

۹) معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{۲}{۳}x-\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲}+\frac{۵}{۶}x$$

$$\frac{۵}{۷}x-\frac{۹}{۱۴}=\frac{۳}{۲}$$

$$\frac{۳}{۴}x+\frac{۵}{۶}=\frac{۲}{۳}x$$

$$\frac{۱}{۲}x-۴=-\frac{۲}{۳}x+۳$$

$$\frac{۳}{۴}x+\frac{۵}{۶}=\frac{۲}{۳}x$$

$$\frac{۲}{۵}x-۳=۱$$

$$\frac{۲}{۴}x-۹=\frac{۷}{۲}$$

$$\frac{۳x+۱}{۲}=\frac{۱}{۵}$$

$$\frac{-۲x+۳}{x-۱}=\frac{-۲}{۹}$$

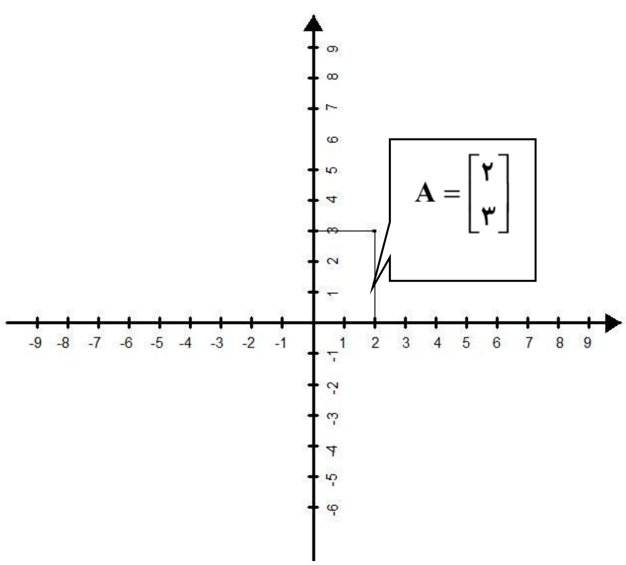
$$\frac{x-۱}{۲}=\frac{۴x-۵}{۳}$$

فصل ۵ بردار و مختصات

مختصات و بردار

مختصات

برای مشخص کردن یک نقطه در صفحه (مانند نقطه A) آن را با دو عدد به صورت $A=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ نشان دهیم. به a طول نقطه A و به b عرض آن گفته می‌شود. برای نشان دادن نقاط در صفحه می‌توانیم این نقاط را روی محور مختصات قرار دهیم. محور مختصات در صفحه شامل دو محور عمود بر هم با مبدا مشترک است. با وجود دستگاه مختصات، هر نقطه با مختصاتش نشان داده می‌شود. مختصات نقطه $A=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ بر روی دستگاه مختصات به شکل زیر است:



در این دستگاه مختصات، نقطه $O=\begin{bmatrix} ० \\ ० \end{bmatrix}$ مبدا مختصات است. در دستگاه مختصات سمت راست مبدا در محور افقی و سمت بالای مبدا در محور عمودی، اعداد مثبت را نشان می‌دهند و سمت چپ محور افقی و پایین محور عمودی، اعداد منفی را نمایش می‌دهند. در دستگاه مختصات، محور افقی محور X ها (طول‌ها) و محور عمودی محور

Yها (عرض‌ها) است. در دستگاه مختصات نقطه $A=\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$، عدد ۲ طول نقطه A و عدد ۳ عرض نقطه A است.

بردار

یک خط جهت دار(فلش) است، که علاوه بر داشتن جهت، مختصات نیز دارد. برداری مانند $\overrightarrow{AB}$ را در نظر بگیرید. این بردار از دو نقطه عبور کرده است که به نقطه A ابتدای بردار و به نقطه B انتهای بردار می‌گویند. اگر مختصات نقطه A برابر $A=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ باشد و مختصات نقطه B برابر $B=\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix}$ باشد آنگاه مختصات بردار $\overrightarrow{AB}$ برابر است با :

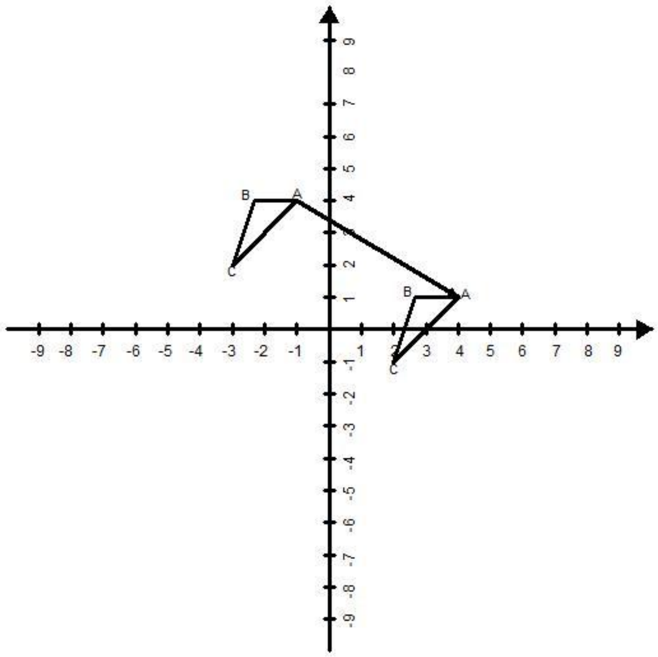
$$\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}c-a\\d-b\end{bmatrix}$$

مختص اول بردار (طول بردار) نشان‌دهنده‌ی میزان جابجایی در راستای محور افقی و مختص دوم بردار (عرض بردار) نشان دهنده‌ی میزان جابجایی بردار در راستای محور عمودی است.

مختصات ابتدای بردار – مختصات انتهای بردار =مختصات بردار

تساوی دو بردار: بردارهایی که هم‌اندازه و هم‌جهت و موازی باشند، را بردارهای مساوی گویند. منظور از هم اندازه بودن یعنی اینکه مختصات بردارها با هم برابر باشد.

انتقال نقاط با بردار



در شکل زیر مثلث ABC را با بردار AA' انتقال داده‌ایم. برای رسیدن از A به A' باید ۵ واحد در جهت مثبت Xها و ۳ واحد در جهت منفی Yها حرکت کنیم. یعنی طول نقطه A را با ۵ و عرض آن را با ۳- جمع کنیم. پس مختصات بردار AA' برابر $AA'=\begin{bmatrix} ۵ \\ -۳ \end{bmatrix}$. جمع متناظر با این بردار برابر است با:

$$\begin{bmatrix} -۱ \\ ۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۵ \\ -۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

در واقع هر بردار نقطه ابتدایش را به انتهایش منتقل می‌کند که گاهی این مطلب به شکل زیر نمایش داده می‌شود.

$$\text{مختصات ابتدای بردار} \xrightarrow{\text{مختصات بردار}} \text{مختصات انتهای بردار}$$

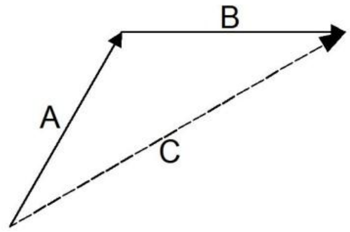
مثال : در رابطه زیر نقطه $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۳ \end{bmatrix}$ توسط بردار $\begin{bmatrix} -۲ \\ -۴ \end{bmatrix}$ را به نقطه $\begin{bmatrix} -۱ \\ +۱ \end{bmatrix}$ انتقال می دهیم.

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ -۳ \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} -۲ \\ ۴ \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} ۱+(-۲) \\ -۳+۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ \\ +۱ \end{bmatrix}$$

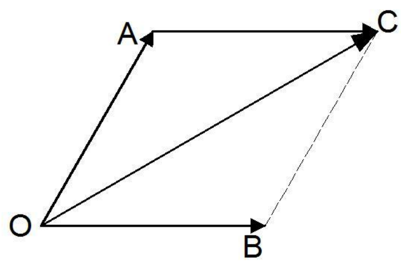
نکته: برای هر بردار رابطه زیر برقرار است:

مختصات ابتدای بردار + مختصات بردار = مختصات انتهای بردار

جمع بردارها



روش مثلثی: برای جمع دو بردار می توان آنهار را طوری رسم کرد که ابتدای هر کدام (به غیر از بردار اول) روی انتهای بردار قبلی قرار گیرد، به این ترتیب حاصل جمع دو بردار برابر است، با برداری که از ابتدای بردار اول به انتهای بردار آخر رسم شود. بردار C حاصل جمع دو بردار A وB است.



روش متوازی الاضلاع : از این روش فقط برای جمع دو بردار استفاده می‌شود. این روش برای جمع بردارهایی استفاده می شود که ابتدای مشترک داشته باشند.

نحوه بدست آوردن جمع دو بردار با روش متوازی‌الاضلاع :

برای بدست آوردن حاصل جمع دو بردار $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ ابتدا از نقطه A برداری مساوی $\overrightarrow{OB}$ رسم می‌کنیم و ان را AC می‌نامیم. اینک حاصل جمع دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ با حاصل جمع دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{AC}$ یکی است.

OC بردار جمع است. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$

جمع مختصاتی دو بردار : برای جمع مختصاتی دو بردار کافیست، مختص اول هر دو بردار با هم جمع شود و مختص دوم بردارها هم با هم جمع شود. مثلاً اگر بخواهیم دو بردار A و B را با هم جمع کنیم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\vec{A}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad \vec{B}=\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\vec{A}+\vec{B}=\begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$$

ضرب عدد در بردار

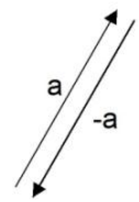
برای ضرب یک عدد در بردار کافیست آن عدد را در هر دو مختص بردار ضرب کنیم.

$$a\times\begin{bmatrix}b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\times b\\a\times c\end{bmatrix}$$

نکته : با ضرب عدد منفی در یک بردار جهت بردار برعکس می‌شود.

نکته : باضرب عدد مثبت در بردار جهت بردار ثابت مانده و تغییر نمی‌کند.

نکته : دو بردار a و a – قرینه یکدیگر هستند.



بردارهای واحد در مختصات

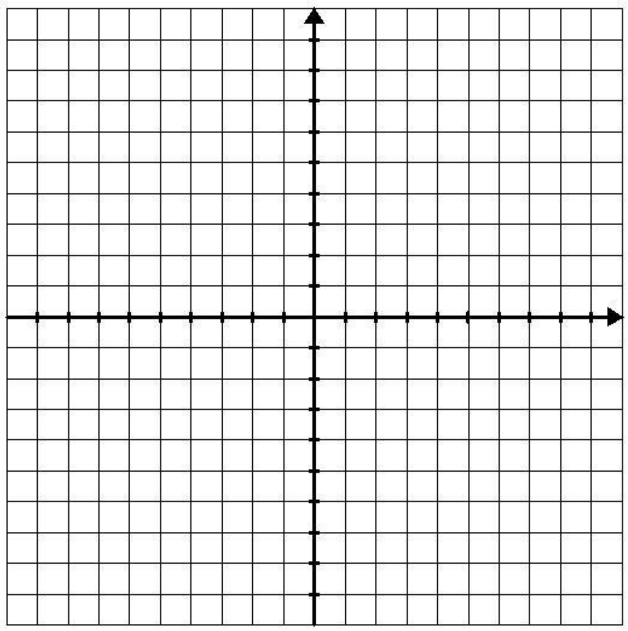
بردارهای $i=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ و $j=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ را بردارهای واحد در مختصات می‌گویند. هر برداری از صفحه را می‌توانیم بر حسب این بردارها بدست آوریم. بردار $\vec{A}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ را بر حسب بردارهای واحد به صورت $\vec{A}=a\vec{i}+b\vec{j}$ است.

$$\vec{A}=a\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=a\vec{i}+b\vec{j}$$

❖ تمرین در کلاس

۱) با نقطه های A،B و C بردارهای AB،AC،BC و CB را در دستگاه مختصات رسم کنید و مختصات بردارها را بنویسید.

$A = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$



۲) در هر یک از قسمت‌های زیر مختصات نوشته نشده را بنویسید؟ (انتقال نقطه)

$\begin{bmatrix} -۴ \\ ۵ \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} ۳ \\ ۸ \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ۲ \\ -۴ \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ۱۲ \\ -۵ \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

۳) حاصل جمع های زیر را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} -۲۳ \\ ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۴۵ \\ -۶ \end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱۳ \end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix} -۳ \\ ۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۴ \\ -۶ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۴ \\ ۴ \end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۳ \\ -۳ \end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix} -۵ \\ ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۵ \end{bmatrix} =$$

٤) اگر بردار A را داشته باشیم آنگاه بردارهای B، C، D و F را بدست آورید؟

$$A = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

الف: B=2A ب: C=-3A ج: D=B+C د: F=2B-3D

۵) در هر یک از معادله‌های زیر مختصات بردار X را بدست آورید؟

$$-۳x = \begin{bmatrix} ۱۲ \\ -۱۸ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۲ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} -۶ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

٦) اگر بردارهای a و b را داشته باشیم مختصات بردارهای x و y را بدست آورید؟

$a = ۳i + (-۴)j$ $\qquad b = ۳i + ۵j$

$x = ۵a + ۳b$ $\qquad y = -۳a + ۶b$

۷) گزینه صحیح و یا غلط را انتخاب نمایید.

- اندازه بردار $\overrightarrow{AB}$ با اندازه بردار $\overrightarrow{AB}$ برابر است. ص ▢ غ ▢
- حاصل جمع هر بردار با قرینه‌اش برابر بردار صفر است. ص ▢ غ ▢
- بردارهای مساوی حتماً با هم موازی هستند. ص ▢ غ ▢
- بردار $a = -۲j$ با بردار $a = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$ برابر است. ص ▢ غ ▢
- اگر $a = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ و $b = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۶ \end{bmatrix}$ باشد آنگاه $b = -۳a$ است. ص ▢ غ ▢

۸) اگر $a = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و $b = \begin{bmatrix} -۴ \\ -۲ \end{bmatrix}$:

الف) مختصات بردار $c = ۳a + b$ را بدست آورید.

ب) بردار c را رسم کنید.

۹) اگر $a=\begin{bmatrix}-۲\\-۱\end{bmatrix}$ و $b=\begin{bmatrix}۲\\۰\end{bmatrix}$:

الف) مختصات بردار $c=۲a-b$ را بدست آورید.

ب) بردار c را رسم کنید.

۱۰) اگر $a=-۳i$ و $b=۳i+j$:

الف) مختصات بردار $c=-۲a+۲b$ را بدست آورید.

ب) بردارهای a و b را رسم کنید.

۱۱) $a=-۲i-j$ و $b=-۳a$:

الف) مختصات دو بردار a و b را بنویسید.

۱۲) اگر مختصات $a=۳i-۲j$ و $b=۴j-i$ باشند :

- ✓ مختصات بردارهای a و b را بنویسید.
- ✓ بردارهای a و b را از مبدا رسم کنید.

۱۳) در معادلات زیر مختصات بردار x را بدست آورید.

$$۴x=\begin{bmatrix}۱۶\\-۲۰\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-۲\\۳\end{bmatrix}+x=\begin{bmatrix}-۵\\-۷\end{bmatrix}$$

$$-۳x=\begin{bmatrix}۱۵\\-۲۱\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-۳\\۴\end{bmatrix}+x=\begin{bmatrix}۲\\۷\end{bmatrix}$$

$$۳x+\begin{bmatrix}-۲\\۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۸\\-۴\end{bmatrix}$$

$$-۴x+\begin{bmatrix}۳\\-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\۹\end{bmatrix}$$

۱٤) هر یک از بردارهای زیر را بر حسب بردارهای واحد بنویسید.

$$a=\begin{bmatrix} ۵ \\ -۳ \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} -۲ \\ ۰ \end{bmatrix} \qquad c=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۵ \end{bmatrix} \qquad d=\begin{bmatrix} -۷ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

۱۵) مختصات هر یک از بردارهای زیر را بنویسید.

$$a=۴i-۳j \qquad b=۵i-۲j \qquad c=۴i \qquad d=-۲j$$

$$e=-i-j \qquad f=-i-\frac{۲}{۳}j \qquad k=-i+j \qquad g=-۹i-j$$

۱٦)حاصل هر یک از عبارتهای زیر را بنویسید.

$$۳\begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \end{bmatrix}+۴\begin{bmatrix} -۱ \\ -۳ \end{bmatrix}= \qquad \begin{bmatrix} -۳ \\ -۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۴ \\ ۸ \end{bmatrix}=$$

$$-۴\begin{bmatrix} -۷ \\ ۳ \end{bmatrix}-۵\begin{bmatrix} ۷ \\ ۳ \end{bmatrix}= \qquad \begin{bmatrix} ۶ \\ -۴ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۹ \\ -۴ \end{bmatrix}=$$

$$-\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۶ \end{bmatrix}+\frac{۲}{۳}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۶ \end{bmatrix}=$$

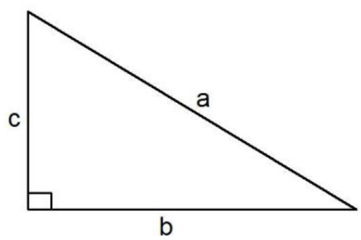
فصل ۶

مثلث

رابطه فیثاغورث

این رابطه فقط در مثلث قائم‌الزاویه تعریف می‌شود. این رابطه به صورت زیر است:

تعریف رابطه فیثاغورث: در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجذور وتر برابر است با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر.

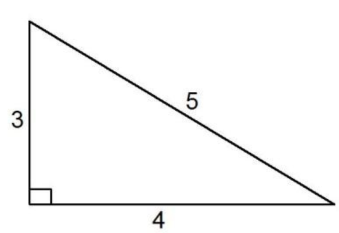


$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$$

عکس رابطه فیثاغورث هم برابر است: اگر در مثلثی مجذور بزرگترین ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

- ✓ **نکته: وتر بزرگترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه است.**
- ✓ **نکته: وتر ضلع روبرو به زاویه قائمه است.**

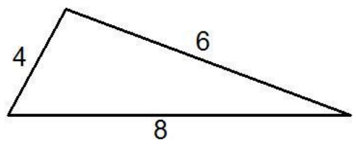
مثال: بررسی کنید دو مثلث زیر کدام قائم‌الزاویه است ؟



$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$$

$$۵^{۲} = ۴^{۲} + ۳^{۲} \Rightarrow ۲۵ = ۱۶ + ۹ \Rightarrow ۲۵ = ۲۵$$

رابطه فیثاغورث برقرار است، پس مثلث قائم‌الزاویه است.



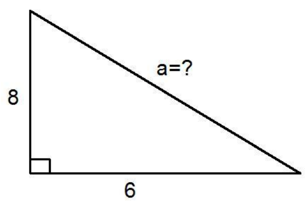
$$a^۲ = b^۲ + c^۲$$

$$۸^۲ = ۴^۲ + ۶^۲ \Rightarrow ۶۴ = ۱۶ + ۳۶ \Rightarrow ۶۴ \neq ۵۲$$

رابطه فیثاغورث برقرار نیست، پس مثلث قائم‌الزاویه نیست.

استفاده از رابطه فیثاغورث

در صورت معلوم بودن اندازه‌های دو ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه می‌توانیم، اندازه‌ی ضلع سوم را حساب کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید.



در مثلث روبرو طول وتر مجهول است، برای پیدا کردن اندازه آن باید از رابطه فیثا غورث استفاده کرد.

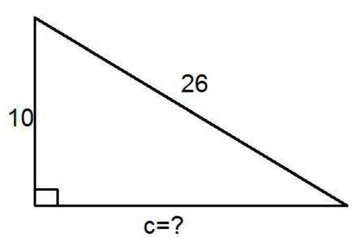
$$a^۲ = b^۲ + c^۲$$

$$a^۲ = ۸^۲ + ۶^۲ \Rightarrow a^۲ = ۶۴ + ۳۶ \Rightarrow a^۲ = ۱۰۰$$

$$a = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$$

نکته : اگر a یک عدد مثبت باشد داریم : $\sqrt{a^۲} = a$

در مثلث زیر طول ضلع مجهول را بدست آورید؟



$$= b^۲ + c^۲$$

$$= ۱۰^۲ + c^۲ \Rightarrow ۶۷۶ = ۱۰۰ + c^۲ \Rightarrow c^۲ = ۶۷۶ - ۱۰۰ \Rightarrow c^۲ = ۵۷۶$$

$$\sqrt{۵۷۶} = ۲۴$$

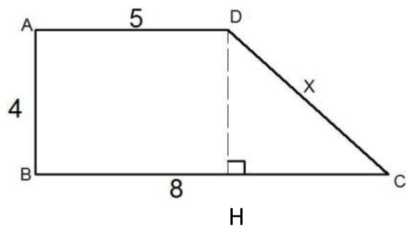
نکته: در حالت کلی اگر یکی از اضلاع مثلث قائم‌الزاویه مجهول باشد، برای بدست آوردن آن از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲$$

$$b^۲ = a^۲ - c^۲$$ (a وتر مثلث قائم‌الزاویه است)

$$c^۲ = a^۲ - b^۲$$

مثال مهم : چهار ضلعی ABCD یک ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه است و اندازه‌های سه ضلع داده شده است. اندازه‌ی ضلع DC را حساب کنید.



حل: مثلث DHC یک مثلث قائم‌الزاویه است.

$$DH = AB = ۴ \qquad HC = ۸ - ۵ = ۳$$

$$X^۲ = DH^۲ + HC^۲$$

$$X^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ = ۲۵$$

$$X = \sqrt{۲۵} = ۵$$

- ***تمرین در کلاس***
- **اندازه یک ضلع مربع ۱۰ سانتیمتر است. اندازه قطر آن را تا یک رقم اعشار بدست آورید؟**

- **اندازه‌ی قطر بزرگ یک لوزی ۱۶ سانتیمتر و قطر کوچک آن ۱۲ سانتیمتر است. اندازه هر ضلع لوزی را بدست آورید.**

- **قطر مستطیل به طول ۸ و عرض ٦ را بدست آورید.**

- مستطیلی به طول ۱۵ و قطر ۱۷ موجود است. عرض این مستطیل چقدر است.

- اندازه یک ضلع مربع ۵ سانتیمتر است. اندازه قطر آن را تا یک رقم اعشار بدست آورید؟

- مستطیلی به طول ۲٤ و عرض ۱۰ موجود است. قطر این مستطیل چقدر است.

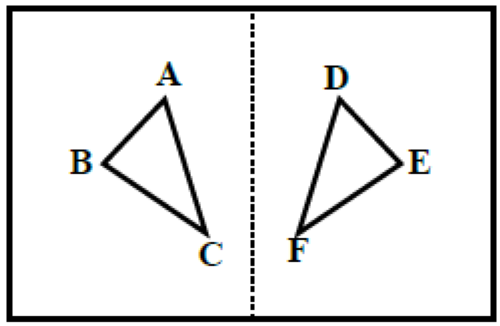
- مستطیلی به قطر ۲٦ و عرض ۱۰ موجود است. طول این مستطیل چقدر است.

همنهشتی دو مثلث

هرگاه دو مثلث بر یکدیگر منطبق شوند ، آن دو مثلث را همنهشت (قابل انطباق) می گوییم.

مانند دو مثلث ABC و DEF که بر هم منطبق و همنهشت هستند و می نویسیم :

$$\overset{\Delta}{DEF} = \overset{\Delta}{ABC}$$



دو مثلث در حالت های زیر با هم مساوی هستند :

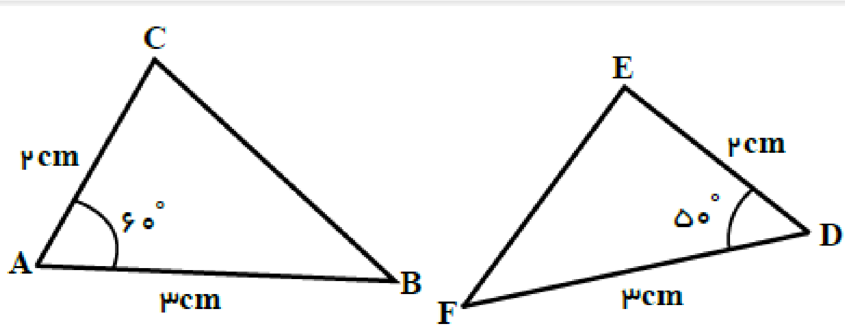
۱- دو ضلع و زاویه بین آنها از یک مثلث ، با دو ضلع و زاویه بین آنها از یک مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشند. (ض ز ض)

۲- دو زاویه و ضلع آنها از یک مثلث ، با دو زاویه و ضلع آنها از یک مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشند. (ز ض ز)

۳- سه ضلع از یک مثلث با سه ضلع متناظر از مثلث دیگر با هم مساوی باشند. (ض ض ض)

مثال : اندازه اضلاع دو مثلث در شکل زیر داده شده است ، چرا دو مثلث با هم همنهشت هستند؟

چرا ۱ BC = EF بر قرار است؟



در هندسه برای بیان استدلال به شیوه زیر عمل می کنیم. جاهای خالی را کامل کنید تا استدلال کامل شود.

ض ز ض — تساوی اجزاء متناظر

فرض مسئله: $\overline{AC} = \overline{DE} = ۲cm$

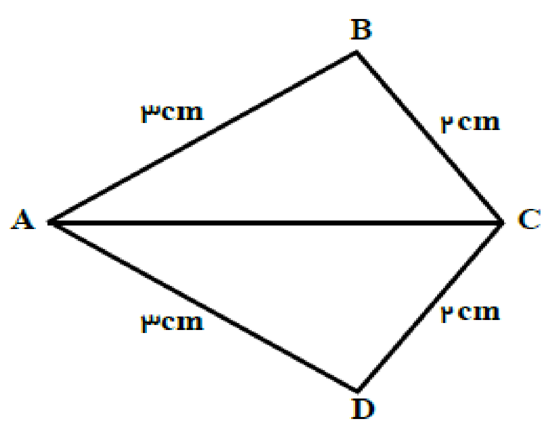
فرض مسئله: $\hat{A} = \cdots\cdots = ۵۰$

فرض مسئله: $\overline{AB} = \cdots\cdots = ۳cm$

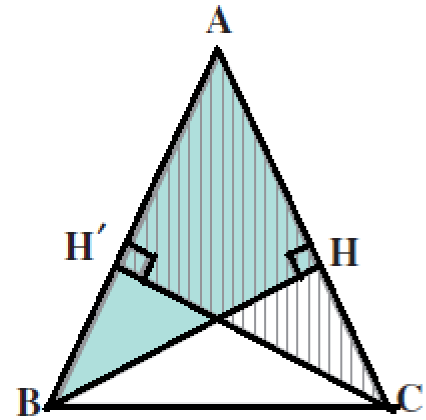
$$\Rightarrow \overset{\Delta}{BCA} = \overset{\Delta}{\cdots\cdots} \Rightarrow BC \;\cdots\cdots\cdots$$

دلیل درستی هر تساوی — تساوی دو ضلع و زاویهٔ بین آنها — حالت تساوی — هم‌نهشتی دو مثلث — تساوی اجزاء متناظر

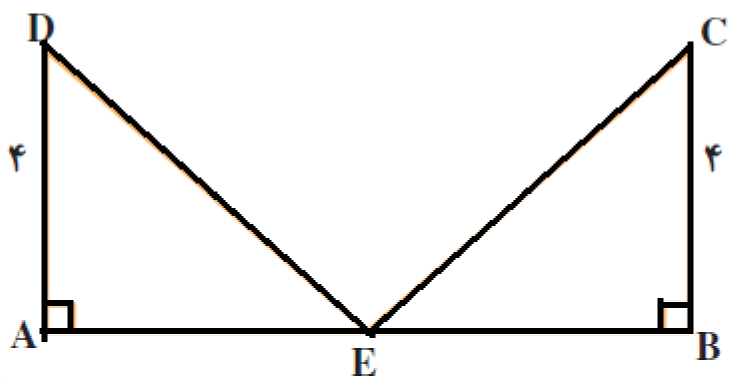
➢ **تمرین** : در شکل زیر چرا دو مثلث همنهشت هستند؟



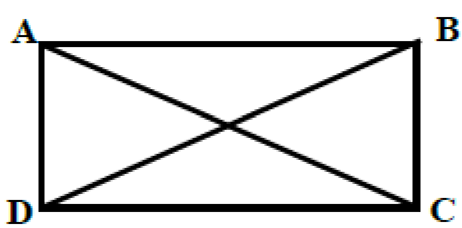
- **تمرین** : مثلث ABC متساوی الساقین است ، آیا دو مثلث قائم الزاویه ABH و 'ACH با هم مساوی و همنهشت هستند؟ بنابر کدام حالت؟



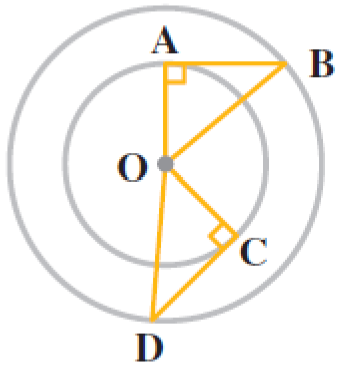
- **تمرین** : نقطه E وسط پاره خط AB است. چرا دو مثلث قائم الزاویه ADE و BCE با هم مساویند؟



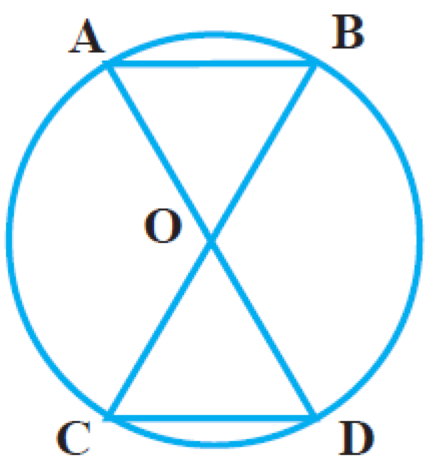
- **تمرین** : چهار ضلعی ABCD یک مستطیل است ، چرا قطرهای مستطیل با هم برابرند؟



➢ **تمرین** : در شکل زیر چرا دو مثلث OAB و OCD با یکدیگر مساویند؟



➢ **تمرین** : با توجه به شکل مقابل چرا $AB = CD$ است؟

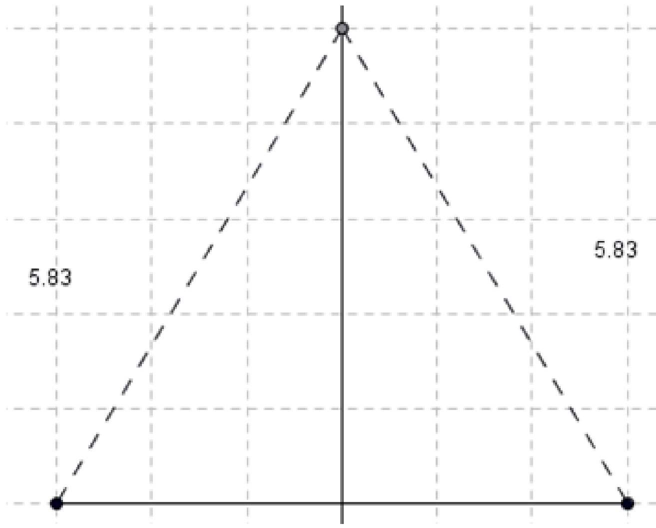


حالت های هم نهشتیِ دو مثلث قائم الزاویه

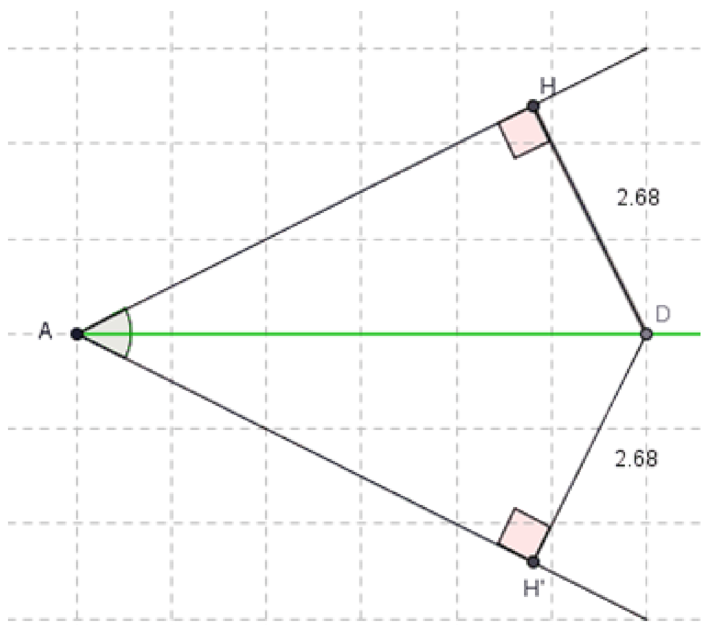
➢ برابری وتر و یک ضلع (وض)

➢ برابری وتر و یک زاویه تند (وز)

- نکته : هر نقطه روی عمود منصّف از دو سر پاره خط به یک اندازه است.



- نکته : هر نقطه روی نیمساز یک زاویه ، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.



فصل ۷
توان و جذر

توان

می‌دانید عبارت ۵+۵+۵ را می‌توان به صورت ۵×۳ نوشت. اما حاصل عبارت ۵×۵×۵ را می‌توان به صورت 5^3 نوشت که در آن به ۵ پایه و ۳ توان می‌گویند.

قوانین توان

- قانون ۱: هر عدد به توان یک، برابر خود عدد است. $a^1 = a$
- قانون ۲: هر عدد (به غیر از صفر) به توان صفر برسد حاصل برابر است با یک. $a^0 = 1$
- قانون ۳: در ضرب اعداد توان‌دار با پایه‌های مساوی، یکی از پایه‌ها را می‌نویسیم و توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

- قانون ٤: در ضرب اعداد توان‌دار با توان‌های مساوی، یکی از توان‌ها را می‌نویسیم و پایه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

- قانون ۵: در تقسیم اعداد توان‌دار با پایه‌های مساوی یکی از پایه‌ها را می‌نویسیم و توان‌ها را از هم کم می‌کنیم.

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

- قانون ٦: در تقسیم اعداد تواندار با توان‌های مساوی یکی از توان‌ها را نوشته و پایه‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$a^n \div b^n = \frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n \quad (b \neq 0)$$

- قانون ۷: هرگاه توان منفی یک عدد باشد، می‌توان پایه را معکوس و توان را قرینه کرد.

$$a^{-m}=(\frac{۱}{a})^{m} \qquad (\frac{a}{b})^{-m}=(\frac{b}{a})^{m}$$

- قانون ۸: به توان رساندن اعداد توان‌دار

$$(a^{n})^{m}=a^{n\times m}$$

مثال:

$$(-۲)^{۲}\times(-۲)^{۴}=(-۲)^{۶}$$

$$\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۴}\times\left(\frac{۲}{۴}\right)^{۴}=\left(\frac{۳\times۲}{۴\times۴}\right)^{۴}=\left(\frac{۶}{۱۶}\right)^{۴}=\left(\frac{۳}{۸}\right)^{۴}$$

$$a^{۵}\times a^{۴}=a^{۵+۴}=a^{۹}$$

$$\frac{a^{۱۳}}{a^{۹}}=a^{۱۳-۹}=a^{۴}$$

$$(a^{۲})^{۳}=a^{۲}\times a^{۲}\times a^{۲}=a^{۶}$$

$$(b^{۶})^{۳}=b^{۶}\times b^{۶}\times b^{۶}=b^{۱۸}$$

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}\times(۰/۲۵)^{۶}=۰/۲۵^{۸}$$

$$\frac{۳^{۲}\times۲^{۵}}{۳^{۴}\times۲^{۴}}=\frac{۳^{۲}}{۳^{۴}}\times\frac{۲^{۵}}{۲^{۴}}=\frac{۲^{۱}}{۳^{۲}}$$

❖ تمرین در کلاس

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید؟

$۲^{۳}\times۴^{۳}=$

$۵^{۷}\times۵^{۱۱}=$

$۲۴^{۱۳}\times۰/۲^{۱۳}=$

$۱۳۵^{۲۳}\div۱۳۵^{۱۴}=$

$(۸/۵)^{۳}\div۵^{۳}=$

$۰/۸۶۷۵^{۱۱}\times۰/۸۶۷۵^{۱۲}=$

$(۰/۵)^{۱۲۳}\div۲^{۱۲۳}=$

$-۳۴^{۲۲}\div(-۲)^{۲۲}=$

۲. در جای خالی عدد مناسب بگذارید.

$(.....)^{۶} = ۲۵^{۳}$

$۴۹^{۳} = (.......)^{۶}$

$۲^{۱۸} = ۶۴^{......}$

$۳^{.......} = ۹^{۴}$

۳. کسرهای زیر را ساده کنید.

$\frac{۲^{۵} \times ۴^{۲}}{۳^{۶} \times ۶^{۳}} =$

$\frac{۱۱^{۸} \times ۲۳^{۳}}{۱۱^{۴} \times ۲۳^{۴}} =$

$\frac{۶^{۵} \times ۲^{۲}}{۳^{۶} \times ۶۴ \times ۹} =$

$\frac{۲۷^{۵} \times ۹^{۲}}{۹^{۶} \times ۲۷} =$

٤. اگر $۵^{x} = a$ باشد مقدار $۵^{x+۱}$ را بدست آورید.

۵. اگر $۲^{x} = ۳$ باشد مقدار $۲^{x-۱}$ را بدست آورید.

٦. عبارت‌های زیر را ساده کنید و به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید؟

$۹^{۵} \times ۲۷ \times ۸۱ =$ $\qquad$ $۸^{۲} \times ۲^{۴} =$

$۱۲۱ \times ۱۱^{۴} \times ۵^{۶} =$ $\qquad$ $۱۲۵ \times ۶۲۵ \times ۵^{۴} =$

$۱۲۵^{۷} \div ۲۵^{۴} =$ $\qquad$ $۸^{۵} \times ۴^{۳} =$

۷. عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید.

$x \times x^{۴} \times x^{۵} =$ $\qquad$ $(xy)^{۳} \times xy =$

$xy \times (۲xy)^{۲} \times x^{۶} =$ $\qquad$ $xy \times x^{۲}y^{۲} =$

۸) صحیح یا غلط بودن جملات زیر را مشخص کنید؟

- ثلث عدد $۳^{۶}$ برابر $۳^{۲}$ است ص ☐ غ ☐
- به توان دوم هر عدد مجذور آن عدد و به توان سوم هر عدد مکعب آن گفته می‌شود. ص ☐ غ ☐
- حاصل هر عدد منفی به توان عدد زوج برابر است با عددی مثبت است. ص ☐ غ ☐
- حاصل هر عدد منفی به توان عدد فرد برابر است با عددی مثبت است. ص ☐ غ ☐
- ٤ برابر عدد $۴^{۳}$ برابر $۴^{۴}$ است . ص ☐ غ ☐
- حاصل عبارت $۳^{۳} \times ۳^{a} \times ۳^{a}$ برابر $۳^{۲a+۳}$ است. ص ☐ غ ☐
- حاصل عبارت $\left(\frac{۷}{۲}\right)^{۲}$ برابر $\frac{۷^{۲}}{۴}$ است. ص ☐ غ ☐
- نصف عدد $۲^{۱۰}$ برابر است با $۲^{۵}$. ص ☐ غ ☐
- تساوی $۸^{۶} = ۴^{۳} + ۴^{۳}$ درست است. ص ☐ غ ☐

۹) جاهای خالی را با کلمات و عبارات مناسب پر کنید.

- هر عدد به توان .... برابر خودش است.
- هر عدد که توان ندارد توانش .... است
- عدد یک به هر توانی برسد حاصل .... است.
- هر عددی به غیر از صفر به توان صفر برسد .... می‌شود.
- سه برابر عدد $۳^۳$ برابر .... است
- در ضرب اعداد تواندار وقتی توان‌ها مساوی باشد، پایه‌ها را در هم .... کرده و یکی از .... را می‌نویسیم.
- مجذور عدد ۰/۳ برابر .... و مکعب آن .... است.

۱۰)عبارتهای زیر را به صورت عددی تواندار بنویسید.

$\frac{۳۶}{۸۱}$ $\frac{۱۲۵}{۱۰۰۰}$ ۰/۰۰۸۱

۱۱) خمس عدد $۵^{۲a+۳}$ را بدست آورید.

۱۲) اگر $۳^n = ۱۲$ باشد مقدار $۳^{n-۱}$ را بدست آورید؟

۱۳) اگر $۳^a = ۶$ و $۳^b = ۱۲$ باشد مقدار عددی عبارت $۳^{۲a+b-۳}$ چقدر است؟

۱۴) حاصل عبارت $\frac{5^5+5^5}{5^2\times 5^3}$ را بدست آورید.

۱۵) حاصل عبارت $\frac{(-3a^2)^2\times b^6}{(2a^3b^4)^2}$ را بدست آورید.

۱۶) حاصلضرب مجذور عدد ۵ با مجذور مکعب عدد ۵ را به صورت یک عدد تواندار بنویسید.

۱۷) کسرهای زیر را ساده کنید؟

$\frac{8^9\times 2/5^9}{20^6}=$

$\frac{(0/25)^7\times 4^7}{3^5\div(0/75)^5}=$

$\frac{20^6\times 5^6}{8^3\times 2^3}=$

$\frac{8^3\times 7^6}{7^2\times 8^7}=$

جذر

اگر a یک عدد طبیعی باشد مجذور آن ، $a^{۲}$ می‌شود. مثلاً ۹ مجذور عدد ۳ است چون $۹ = ۳^{۲}$.
جذر یک عدد طبیعی مانند b برابراست با $\sqrt{b}$ نشان می‌دهند. مثلاً جذر عدد ٦٤ می شود ٨ چون : $\sqrt{۶۴} = ۸$.

❖ **به مثال های زیر توجه کنید :**

$$\sqrt{۲۵} = ۵ \text{ ، } \sqrt{۴۹} = ۷ \text{ و } \sqrt{۰/۰۶} \simeq ۰/۲۴$$

محاسبه جذر اعداد توان دار

برای محاسبه جذر اعداد توان دار می توان از روش زیر استفاده کرد :

$$(a > ۰)\ \sqrt[n]{a^{m}} = a^{\frac{m}{n}}$$

نکته : در عبارت نوشته شده بالا ، m را توان و n را فرجه رادیکال می نامیم.

نکته بسیار مهم : هر عددی که زیر رادیکال قرار می گیرد بایستی مثبت باشد نه منفی.

نکته : اگر در بالای رادیکال مقدار فرجه را ننوشته بودند ، همیشه مقدار فرجه را عدد ۲ در نظر می گیریم.

نکته : جذر حاصل ضرب چند عدد نا منفی برابر با حاصل ضرب جذر آن اعداد می باشد.

$$\sqrt{a \times b \times c \times \ldots} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c} \times \ldots$$

❖ **به مثال های زیر توجه نمایید :**

الف) $\sqrt{۲۵ \times ۸۱} = ۵ \times ۹ = ۴۵$

ب) $\sqrt{۰/۱۶} = \sqrt{۰/۰۱ \times ۱۶} = ۰/۱ \times ۴ = ۰/۴$

تمرین : حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$\sqrt{۹\times ۸۱} =$ ____________ $\sqrt{۴\times ۳۶} =$ ____________

$\sqrt{۱۰۰\times ۱۶} =$ ____________ $\sqrt{۴۹\times ۴} =$ ____________

$\sqrt{\dfrac{۱۲۱\times ۹}{۱۰۰}} =$ ____________ $\sqrt{\dfrac{۲۵}{۶۴}} =$ ____________

جذر تقریبی

می خواهیم بدانیم که جذر عدد ۲۸ بین چه مقادیری است؟ برای این کار ابتدا باید گفت عدد ۲۸ بین کدام یک از اعدادی است که جذر کامل دارند؟

همانطور که می دانیم عدد ۲۸ بین اعداد ۲۵ و ۳٦ است. (اعداد ۲۵ و ۳٦ دارای جذر کامل هستند.)

➢ **پس جذر عدد ۲۸ بین جذر اعداد ۲۵ و ۳٦ است ، یعنی بین $\sqrt{۲۵}$ و $\sqrt{۳۶}$ است.**

به جدول زیر دقت نمایید :

عدد	۵	۵/۱	۵/۲	۵/۳	۵/۴
مجذور	۲۵	۲۶/۰۱	۲۷/۰۴	۲۸/۰۹	۲۹/۱۶

نمایش هندسی اعداد بر روی محور اعداد (خط حقیقی)

نمایش اعداد طبیعی،اعداد صحیح و اعداد گویا نسبتا ساده است ولی نمایش هندسی اعداد گنگ (اصم) نیازمند اطلاعات هندسی بیشتری می باشند حتی بعضی از مواقع مساله بغرنج تر می شود به این معنی که همه اعداد گنگ ترسیم پذیر نیستند.البته ما بنا نداریم به صورت پیشرفته وارد این

بحث شویم بلکه فقط می خواهیم در حد ریاضیات هشتم مطالبی را ارائه دهیم. به زعم تاریخ به نظر می رسد اولین عدد گنگ که بشر به آن دست یافته است $\sqrt{2}$ می باشد . در تاریخ ریاضیات آمده است که کسی که راز اعداد گنگ را فاش کرد سوزانده شد.گرچه گرفتن جان یک انسان تنفر برانگیز بوده و هیچ عقل سلیمی آن را نمی پسندد ولی فاش شدن این راز دریچه جدیدی از ریاضیات را به سوی بشر گشود.

در حد کتاب درسی معمولا اعداد گنگ $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{8}$ بیشتر ظاهر می شوند و دانش آموزان معمولا با یاد گرفتن رسم این اعداد می توانند از عهده حل تمرینات و سئوالات امتحانی برآیند به همین دلیل ما نیز بیشتر به این اعداد و مشتقات آن ها می پردازیم.

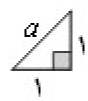
برای ساختن طول هایی به اندازه اعداد گنگ بالا از قضیه فیثاعورس کمک می گیریم.روش ساخت راذیلا شرح می دهم:

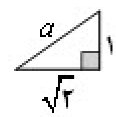
برای ساخت طولی به اندازه $\sqrt{2}$ از مثلث قائم الزاویه ای استفاده می کنیم که طول اضلاع زاویه قائمه آن برابر ۱ باشند وتر این مثلث برابر $\sqrt{2}$ است.

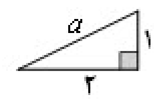
برای ساخت طولی به اندازه $\sqrt{3}$ از مثلث قائم الزاویه ای استفاده می کنیم که طول اضلاع زاویه قائمه آن برابر ۱ و$\sqrt{2}$ باشند وتر این مثلث برابر $\sqrt{3}$ است.

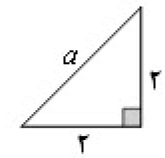
برای ساخت طولی به اندازه $\sqrt{5}$ از مثلث قائم الزاویه ای استفاده می کنیم که طول اضلاع زاویه قائمه آن برابر ۱ و ۲باشند وتر این مثلث برابر $\sqrt{5}$ است.

برای ساخت طولی به اندازه $\sqrt{8}$ از مثلث قائم الزاویه ای استفاده می کنیم که طول اضلاع زاویه قائمه آن برابر ۲ و ۲باشند وتر این مثلث برابر $\sqrt{8}$ است.

<table>
<tr>
<td>

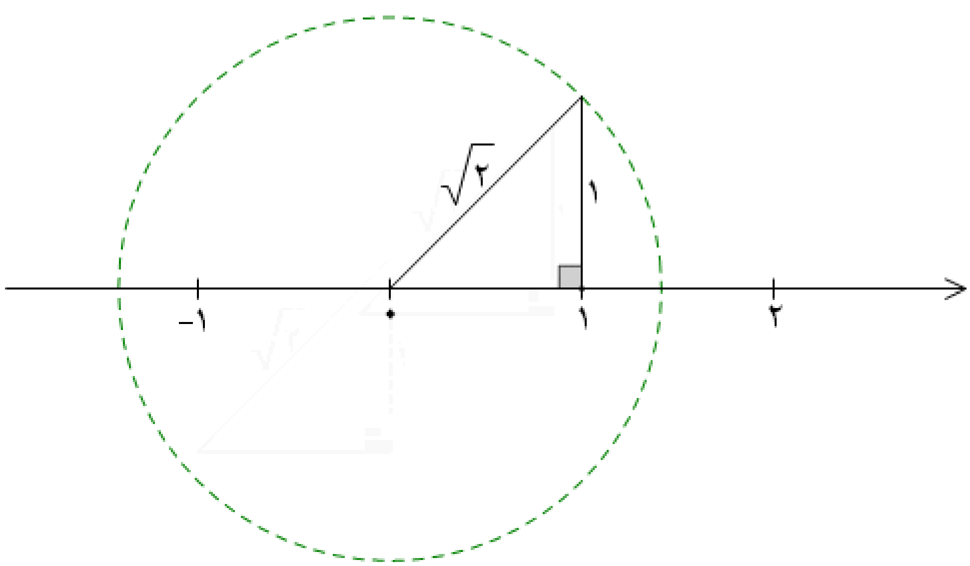
$a^{۲} = ۱^{۲} + ۱^{۲}$
$a^{۲} = ۲$
$a = \sqrt{۲}$</td>
<td>

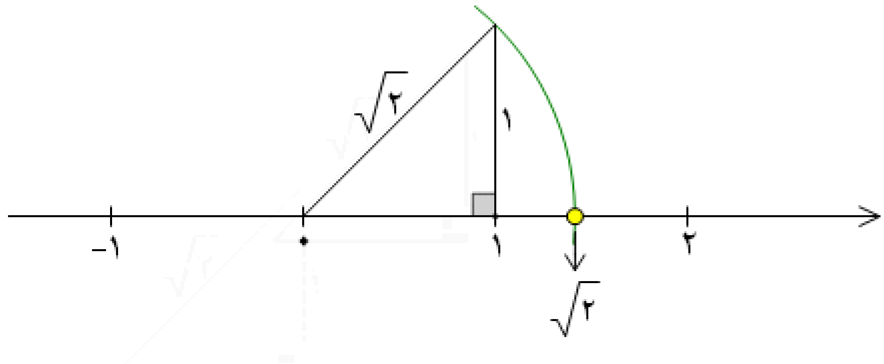
$a^{۲} = ۱^{۲} + \left(\sqrt{۲}\right)^{۲}$
$a^{۲} = ۱ + ۲ = ۳$
$a = \sqrt{۳}$</td>
<td>

$a^{۲} = ۱^{۲} + ۲^{۲}$
$a^{۲} = ۱ + ۴ = ۵$
$a = \sqrt{۵}$</td>
<td>

$a^{۲} = ۲^{۲} + ۲^{۲}$
$a^{۲} = ۴ + ۴ = ۸$
$a = \sqrt{۸}$</td>
</tr>
</table>

برای پیداکردن نقطه متناظر با اعداد گنگ کافیست ما همین مثلث ها را روی محور اعداد بسازیم.مثلا برای پیدا کردن نقطه متناظر با عدد $\sqrt{2}$ کافیست پاره خط بین صفر و یک را یک ضلع مثلث در نظر گرفته و در نقطه۱ پاره خطی به طول ۱ عمود کنیم و نقطه انتهایی پاره خط عمود را به مبداء وصل کنیم تا مثلث قائم الزاویه ساخته شود با توجه به توضیحات ارائه شده طول وتر برابر $\sqrt{2}$ می باشد. اکنون به مرکز مبداء وشعاعی برابر طول وتر این مثلث دایره ای رسم می کنیم (چون $\sqrt{2}$ مثبت است کافیست کمانی از دایره را رسم کنیم که محور را در سمت راست مبداء قطع می کند) نقطه برخورد دایره با محور را مشخص می کنیم این نقطه متناظرعدد $\sqrt{2}$است.



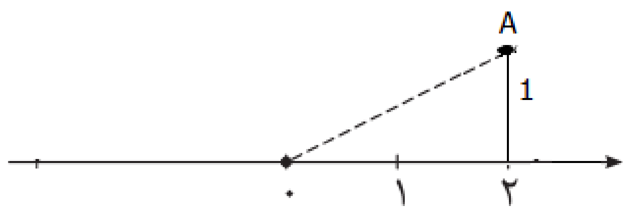


➢ روش رسم $\sqrt{5}$

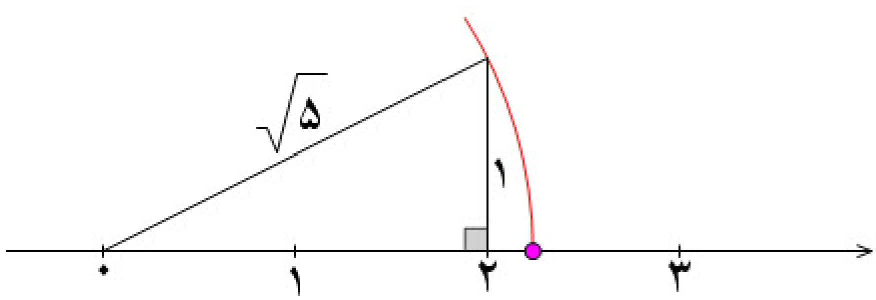
مثال 1 : عدد رادیکال 5 یعنی $\sqrt{5}$ را روی محور اعداد نمایش دهید .

اول: ما می دانیم که رادیکال5 یک عددی تقریبی که بین 2 و 3 است . پس با این فرض این عدد برروی محور اعداد باید بین 2 و 3 قرار بگیرد .

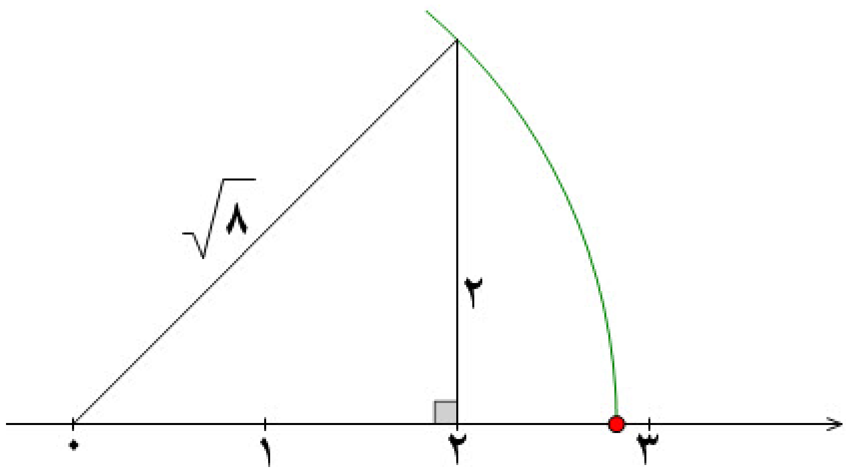
دوم : از نقطه 2 به اندازه یک واحد و به سمت بالا یک خط رسم می کنیم .



اکنون به شکل بالا دقت کنید . یک مثلث قایم الزاویه به دست آمد که یک ضلع آن برابر 1 و ضلع دیگر آن برابر 2 است پس بنابر قضیه فیثاغورث ضلع سوم برابر با $\sqrt{5}$ خواهد شد .



➢ روش رسم $\sqrt{8}$



❖ جملات درست را مشخص کنید.

۱) حاصل $\sqrt{۰/۲۵\times۰/۰۹}$ مساوی ۰/۱۵ است. ص ☐ غ ☐

۲) حاصل $\sqrt{\frac{۰/۲۵}{۳۶}}$ برابر $\frac{۵}{۶}$ است. ص ☐ غ ☐

۳) حاصل $\sqrt{۱۶^۳}$ برابر $۴^۳$ است. ص ☐ غ ☐

فصل ۸ آمار و احتمال

آمار

. علم آمار ، علم جمع آوری ، سازماندهی ، تفسیر و تحلیل اطلاعات (داده ها) است. پس از جمع آوری داده ها و اطلاعات و تفسیر و تحلیلشان ، نمودارهایی رسم می شود که به کمک آنها نتایج را به صورت آماری تفسیر می کنند.

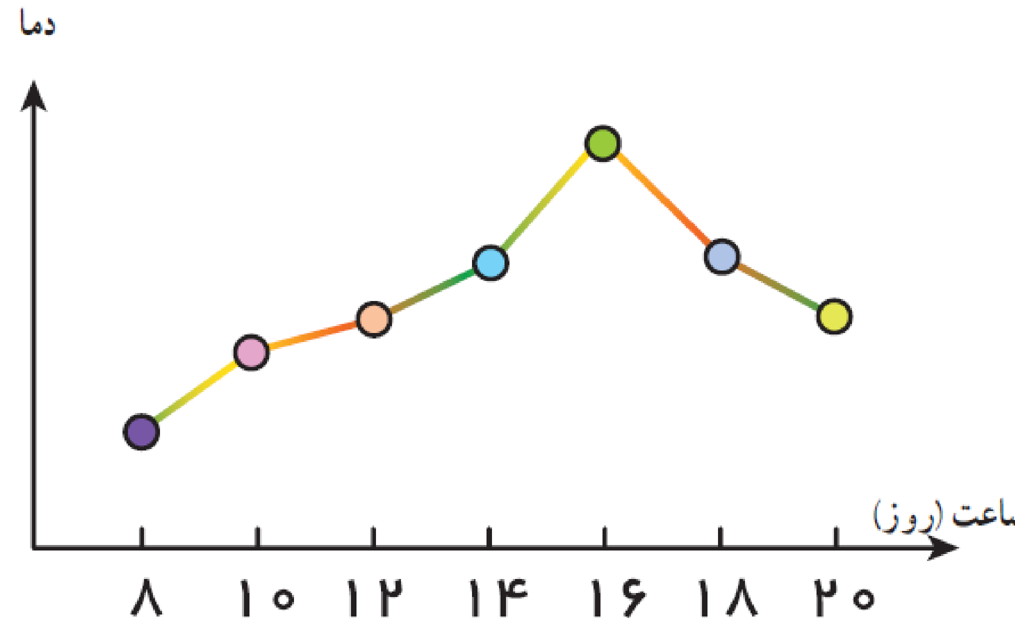
در زیر ، ٤ مورد از پرکاربرد ترین نمودارهای آماری را مشاهده می کنید.

نمودار خطّ شکسته برای نمایش تغییرها کاربرد دارد؛ بنابراین در موضوع‌هایی که تغییرها اهمّیت دارد، از این نمودار استفاده می‌شود. برای نمونه تغییرها در بازارهای مالی، قیمت طلا، نفت، سهام و... را با این نمودار نشان می‌دهند.

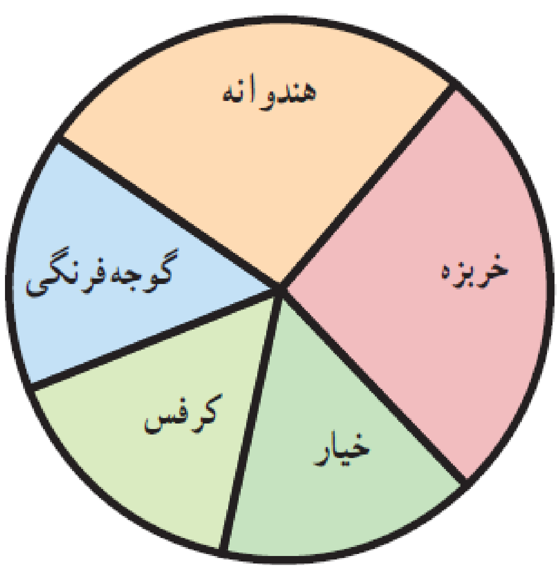
گاهی وقت‌ها به‌جای داده‌های واقعی از مقدار تقریبی آنها استفاده می‌کنیم. در برنامه‌ریزی‌های کلان به عددهای واقعی و دقیق نیاز نداریم. برای مثال مقدار تولید گندم یک استان را به‌صورت چند هزار تن بیان می‌کنند؛ یعنی مقدار کمتر از ۱۰۰۰ تن یا یک میلیون کیلوگرم در این بررسی اهمّیت ندارد.

بعضی از داده‌ها و اطّلاعات جمع‌آوری شده نشان می‌دهد که یک مقدار مشخّص به چه نسبتی به بخش‌های کوچک‌تر تقسیم شده است. در این موارد می‌توان تقسیم شدن را روی یک شکل مثل دایره نشان داد و سهم هر بخش را روی دایره مشخّص کرد. در نمودار دایره‌ای به طور معمول نسبت و سهم هر بخش را به‌صورت درصد محاسبه کرده؛ و سپس روی نمودار نمایش می‌دهند.

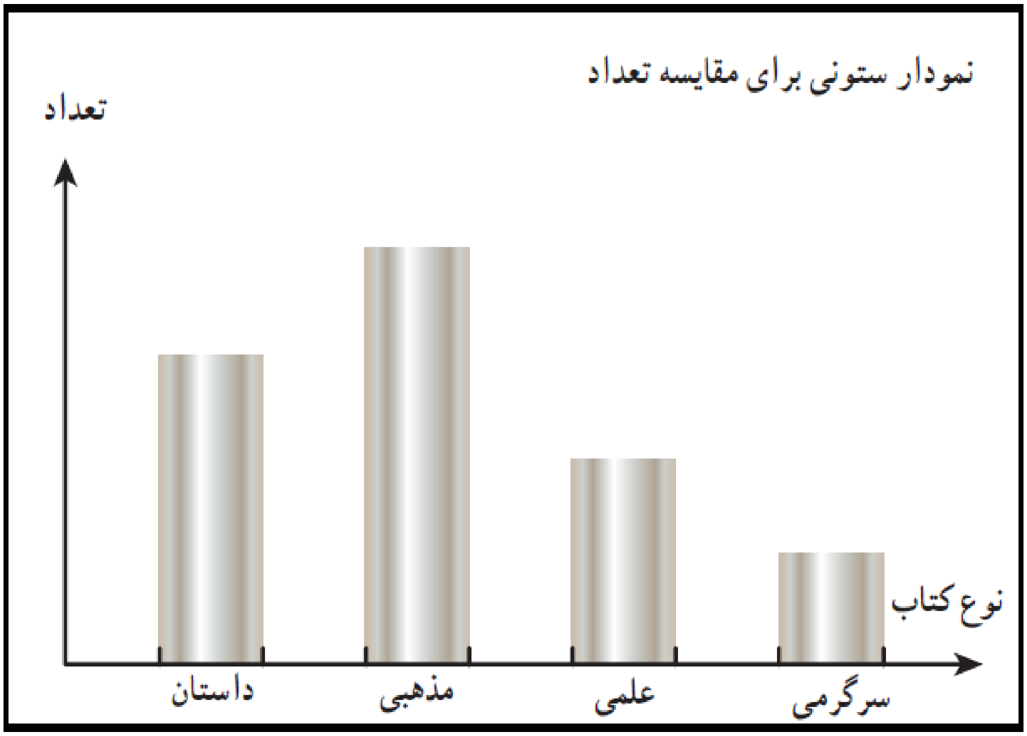
نمودار خط شکسته برای نشان دادن تغییرات در یک مدت مشخص

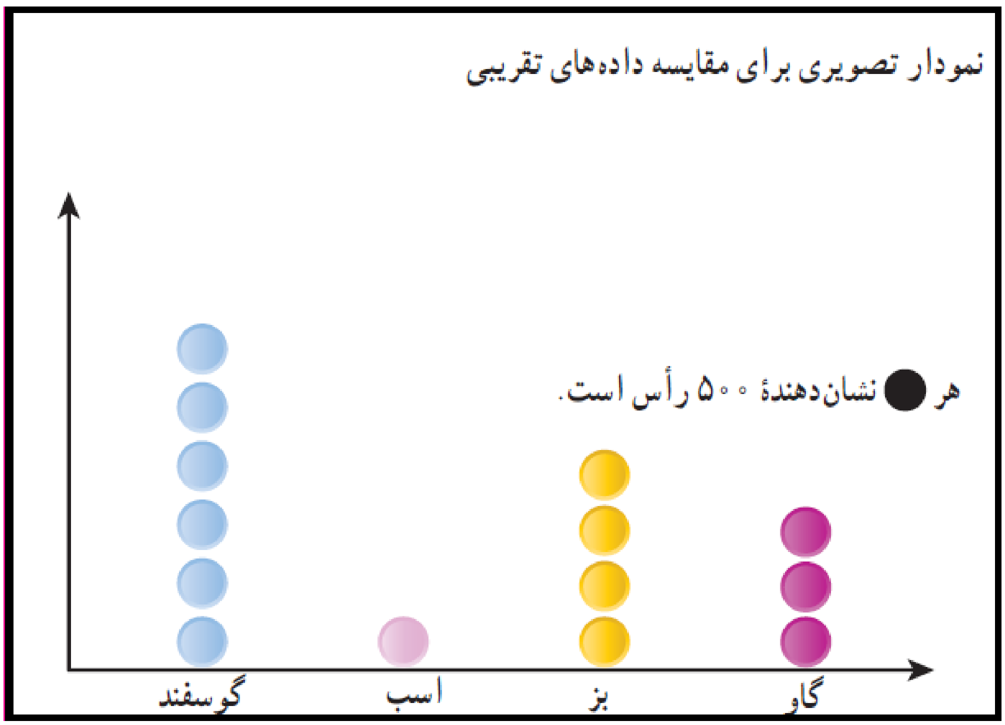


نمودار دایره‌ای برای نشان دادن تعداد داده‌ها نسبت به کل



سطح زیر کشت کشاورزی یک مزرعه


نمودار ستونی برای مقایسه تعداد
تعداد
نوع کتاب
داستان
مذهبی
علمی
سرگرمی


نمودار تصویری برای مقایسه داده‌های تقریبی
هر ● نشان‌دهندهٔ ۵۰۰ رأس است.
گوسفند
اسب
بز
گاو

نمودار ستونی

نمره درس ریاضی سوم راهنمایی دانش‌آموزان یک مدرسه به شرح زیر است.

۱۰	۱۲	۱۱.۵	۲۰	۱۹	۸	۷	۵
۱۳	۱۱.۵	صفر	۸.۵	۱۳.۵	۲۰	۱۶	۱۹
۱۵	۱۵.۵	۱۵.۲۵	۲۰	۱	۲.۵	۳	٤

برای رسم نمودار ستونی مراحل زیر را انجام دهید:

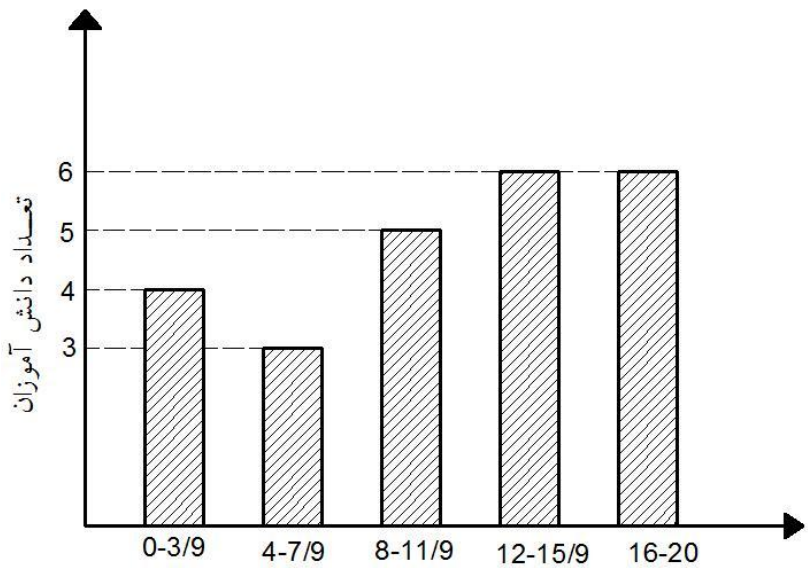
1) **ابتدا تمامی اعداد را از بیشترین نمره تا کمترین نمره مرتب می‌کنیم.(یا می‌توانید از کمترین نمره تا بیشترین نمره مرتب کنید)**
2) **برای نمایش وضع کلاس نمره‌ها را به ۵ دسته با فواصل مشخص دسته‌بندی می‌کنیم.**
3) **اکنون جدول داده‌ها را برای نمره‌ها تشکیل می‌دهیم.**

نمره‌ها را به ۵ دسته با فواصل مشخص دسته‌بندی کرده‌ایم.

۳/۹ – ۰	خیلی بد
۷/۹ – ۴	بد
۱۱/۹ – ۸	ضعیف
۱۵/۹ – ۱۲	خوب
۲۰ – ۱۶	خیلی خوب

اکنون جدول داده‌ها را تشکیل می دهیم . برای این کار یکی یکی اعداد را می‌خوانیم و برای هر نمره در قسمت مربوطه یک خط می‌کشیم. خط‌ها را در دسته‌های پنج‌تایی می کشیم تا شمردن آنها راحت باشد.

دسته‌ها	خط نشان	فراوانی هر دسته
۳/۹ – ۰	////	٤
۷/۹ – ۴	///	۳
۱۱/۹ – ۸	~~////~~	۵
۱۵/۹ – ۱۲	~~////~~ /	٦
۲۰ – ۱۶	~~////~~ /	٦



نکته : دسته‌ها را باید طوری انتخاب کرد که فراوانی هیچ دسته‌ای صفر نشود.

میانگین

نمره ریاضی آرین و هادی در امتحان‌های ریاضی ماهانه به ترتیب برابر است با :

آرین	۱۷.۵	۱۲	۱٦	۱۰	۱۷	۱۲.۵	۱۳	۱٤
هادی	۱۸.۵	۱۳	۱٤	۱۳.۵	۱۳	۱۷.۵	۱۱.۵	۱۹

به نظر شما عملکرد کدامیک بهتر است؟

یک راه مقایسه، محاسبه‌ی میانگین نمرات (معدل) است. برای محاسبه میانگین همه نمرات را با هم جمع می‌کنیم و بر تعداد نمرات تقسیم می‌کنیم.

میانگین نمرات آرین: $\frac{۱۴+۱۳+۱۲/۵+۱۷+۱۰+۱۶+۱۲+۱۷/۵}{۸}=\frac{۱۱۲}{۸}=۱۴$

میانگین نمرات هادی: $\frac{۱۹+۱۱/۵+۱۷/۵+۱۳+۱۳/۵+۱۴+۱۳+۱۸/۵}{۸}=\frac{۱۲۰}{۸}=۱۵$

- به نظر می‌رسد هادی در مجموع نمرات خوبی کسب کرده است.

- متوسط دسته برابر است با : (ابتدای دسته + انتهای دسته) تقسیم بر دو
- میانگین برابر است با (مجموع متوسط دسته × فراوانی) تقسیم بر مجموع فراوانی

❖ تمرین در کلاس

۱) میانگین نمرات درس‌های علوم ریاضی زبان و عربی ۱۷/۲۵ است. اگر نمرات علو زبان و عربی به ترتیب ۱۷، ۱۸/۵ و ۱۵ باشد. نمره‌ی ریاضی او را حساب کنید.

۲) متوسط دسته‌ی ۴۰–۳۳/۹ را حساب کنید.

۳) میانگین ۱۰ داده‌ی آماری ۱۵ شده است. به مجموع داده‌ها ۱۵ واحد اضافه می‌کنیم. میانگین جدید کدام است؟

٤) در جداول زیر جاهای خالی را پر کنید.

دسته‌ها	فراوانی	متوسط دسته	فراوانی × متوسط دسته
۸–۱۲			۱۵۰
۱۶–۲۰		۱۸	۷۲

دسته‌ها	فراوانی	متوسط دسته	فراوانی × متوسط دسته
۶–۹/۹	٦		
۱۰–۱۳/۹	۱۲		

دسته‌ها	فراوانی	متوسط دسته	فراوانی × متوسط دسته
۱۲–۱۵/۹			۱۲٦

دسته‌ها	خط نشان	فراوانی	متوسط دسته	فراوانی × متوسط دسته
۶–۹/۹	~~||||~~ |		٦	
۱۰–۱۳/۹		۱۲		

۵) در جداول زیر ابتدا جاهای خالی را پر کنید و سپس میانگین را حساب کنید.

دسته‌ها	فراوانی	متوسط دسته	فراوانی × متوسط دسته
۰–۹/۹	۸	۵	
۱۰–۲۰	۱۷	۱۵	
جمع	۲۵	------	

دسته‌ها	فراوانی	متوسط دسته	فراوانی × متوسط دسته
۰−۹/۹	۹		٤٥
۱۰−۲۰			٦۰
جمع		------	

٦) نمرات زهره در سه درس به ترتیب ۱۷، ١٦/٥ و ۱۸/٥ است. میانگین نمرات او چند است؟

۷) نمرات علی در چهار درس به ترتیب ۱۱، ۱٥/٥ ، ١٤/٥ و ۱۲ است. میانگین نمرات او چند است؟

۸) میانگین نمرات رضا در درس‌های علوم، ریاضی و زبان ۱٥/٥ است. اگر نمرات علوم، زبان به ترتیب ۱٥، ۱۷ باشد. نمره‌ی ریاضی او را حساب کنید.

۹) محصول شیر یک دامداری در ٥ ماه ۱۷، ۱۲، ۹ ، ۱٥ و ۲۱ تن بوده است. میانگین تولید شیر در این ٥ ماه چقدر بوده است.

مفهوم احتمال و پیشامد

- علم احتمال اولین بار از بازی های شانس به وجود آمد .
- در بازی های شانس ، برد و باخت اهمیت فراوان دارد و حدس زدن مطرح می شود.
- واژه احتمال را در صحبت های روزمره ی اشخاص زیاد شنیده اید . به طور مثال یکی از دوستانتان به شما می گوید: به احتمال٪ ۹۹ می آیم . چه قدر منتظر او هستید ؟حتما خیلی زیاد و یا به این جمله اعتقاد دارید هر چه دانش آموز بیشتر درس بخواند ، احتمال قبول شدن او بیش تر است. یعنی احتمال کم و زیاد می شود ، پس احتمال را می توان اندازه گرفت.
- احتمال شامل دو پدیده می شود :

۱- **پدیده قطعی**

آزمایش یا پدیده ای که قبل از رخداد نتیجه اش معلوم باشد مثلا توپی را در سراشیبی رها می کنیم حتما توپ به سمت پایین حرکت می کند.

۲- **پدیده تصادفی**

آزمایش یا پدیده ای که قبل از انجام آزمایش یا مشاهده نتیجه اش معلوم نباشد مثلا قبل از پرتاب یک سکه نمی توان با اطمینان گفت رو یا پشت ظاهر می شود.

به عنوان مثال : اگر یک کیسه شامل ۵ مهره با شماره های ۱ تا ۵ باشد و بخواهیم یک مهره را به صورت شانسی و قرعه کشی بیرون بیاوریم فضای نمونه (۱-۲-۳-٤-۵) است.

- **پیشامد** : به مواردی که ممکن است در یک مسئله احتمال اتفاق بیفتد .(در پرتاب سکه) پیشامد مطلوب قسمتی از فضای نمونه که ما تمایل داریم اتفاق بیفتد.

مثال :در یک روز ابری می خواهیم برای گردش و تفریح بیرون برویم . می دانیم شاید باران بارد و شاید بارن نبارد . به عبارت دیگر فضای نمونه (باران می بارد ،باران نمیبارد) است ولی بی شک ما بیشتر تمایل داریم باران نبارد . به نباریدن باران پیشامدگوییم .

- **نکات مربوط به احتمال :**
  - **همیشه مجموع احتمال برابر یک می شود.**
  - **همیشه مقدار احتمال بین ۱ و ۰ می شود.**
  - **هیچ عددی وجود ندارد که احتمال آن بزرگتر از یک باشد.**

احتمال غیر ممکن :

اگر احتمال یک پیشامد برابر صفر باشد آن پیشامد را غیر ممکن گویند.

مثال :در پرتاب یک تاس مطلوب است احتمال این که عدد ۷ ظاهر شود.(یا پرواز سنگ)

نکته : می دانیم تاس تا عدد ٦ دارد. پس احتمال ظاهر شدن عدد ۷ صفر است.

پس ظاهر شدن عدد ۷ غیر ممکن است.

وقتی یک سکه را می‌اندازیم، دو حالتِ هم‌شانس ممکن است اتفاق بیفتد، یا سکه رو می‌آید یا پشت و چون در یک حالت از این دو حالتِ ممکن، سکه رو می‌آید؛ پس احتمال رو آمدن سکه $\frac{۱}{۲}$ است.

به این ترتیب برای بیان اندازهٔ شانس رخ دادن یک اتفاق، از یک عدد استفاده کرده‌ایم که احتمال رخ دادن آن اتفاق نامیده می‌شود.

برای اینکه احتمال رخ دادن یک اتفاق را به‌دست آوریم، ابتدا همهٔ حالت‌های ممکن را می‌یابیم، سپس حالت‌های موردنظر را از میان حالت‌های ممکن پیدا می‌کنیم. احتمال رخ دادن اتفاق موردنظر برابر است با نسبت تعداد حالت‌های موردنظر به تعداد حالت‌های ممکن؛ بنابراین :

$$\text{احتمال رخ دادن یک اتفاق} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب برای رخ دادن آن}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن برای رخ دادن آن}}$$

➢ **به مثال زیر توجه کنید و در کلاس بحث و تبادل نظر نمایید.**

۱۲ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۸ ۲۰

۱۱ ۱۳ ۱۷ ۱۹

الف) در چند تا از آن ها عدد روی کارت ، اول است ؟ ۴ کارت

ب) در چند تا از آن ها عدد روی کارت ، مرکب است ؟ ۶ کارت

$\frac{۶}{۱۰}$ = احتمال مرکب بودن

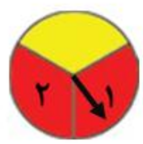
$\frac{۴}{۱۰}$ = احتمال اول بودن

بررسی حالت های ممکن

- به مثال زیر توجه کنید و در کلاس بحث و تبادل نظر نمایید.

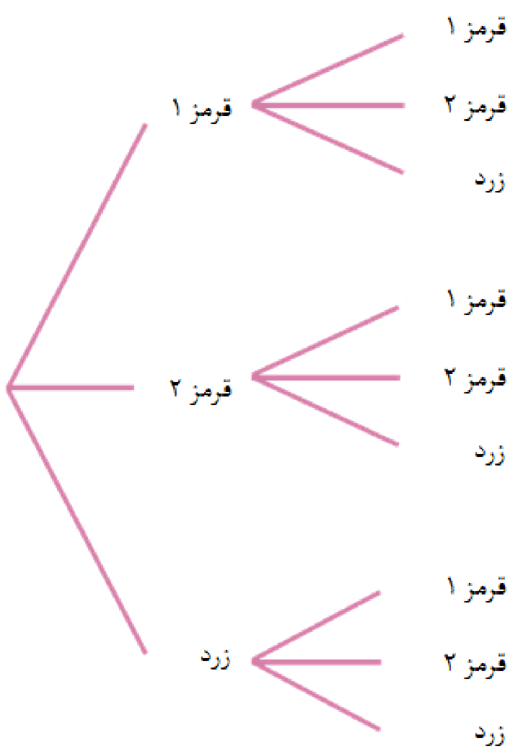
دو چرخنده داریم که هر کدام شامل دو رنگ قرمز ۱ و قرمز ۲ و رنگ زرد است ، هر کدام از چرخنده ها را می چرخانیم و حالت های ممکن و افتادن عقربه مخصوص روی رنگ ها را بررسی میکنیم.

چرخنده اول



چرخنده دوم

حالت‌های ممکن



قرمز ۱ – قرمز ۱
قرمز ۱ – قرمز ۲
قرمز ۱ - زرد

قرمز ۲ – قرمز ۱
قرمز ۲ – قرمز ۲
قرمز ۲ - زرد

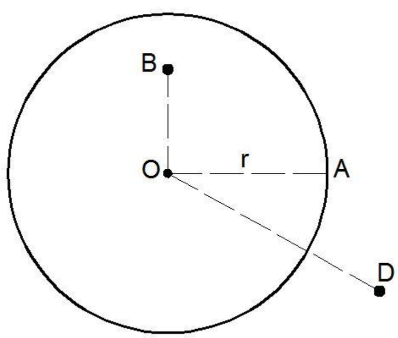
زرد – قرمز ۱
زرد – قرمز ۲
زرد - زرد

فصل ۹ دایره‌ها

دایره

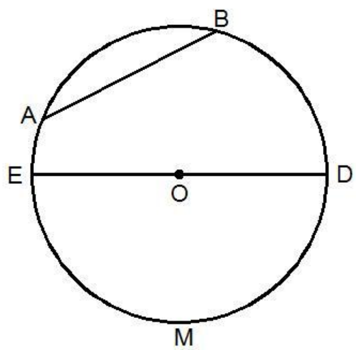
در دایره نشان داده شده، نقطه O مرکز دایره و پاره‌خط OA شعاع دایره است. نقطه A روی محیط دایره، نقطه B داخل و نقطه D خارج آن قرار دارد.

اگر اندازه‌ی شعاع این دایره را با r نشان دهیم داریم:



$OA = r$ $OB < r$ $OD > r$

در شکل زیر دو نقطه A و B، کمان‌های AB و AMB را روی دایره جدا کرده‌اند. پاره‌خط AB وتر نظیر هر یک از این دو کمان است. وتر ED که از مرکز دایره گذشته است، یک قطر دایره است و هریک از کمان‌های EAD و EMD یک نیم‌دایره هستند. (بزرگترین وتر در دایره قطر است)



نکته : یک دایره بیشمار قطر و بیشمار شعاع دارد.

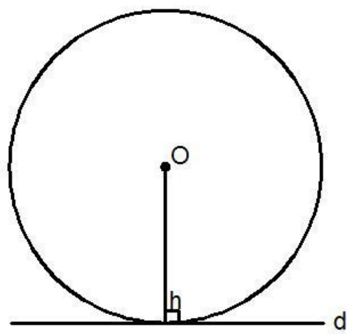
- ✓ **نکته: دو دایره زمانی با یکدیگر مساوی هستند که، دارای شعاع یکسان و یا قطر یکسان باشند.**
- ✓ **نکته : اگر r شعاع دایره و D قطر آن باشد، آنگاه رابطه روبرو برای هر دایره برقرار است :**

$D = 2r$ یا $r = \frac{D}{2}$

وضع یک خط و یک دایره نسبت به هم

- ➢ **خط و دایره فقط یک نقطه مشترک دارند.**

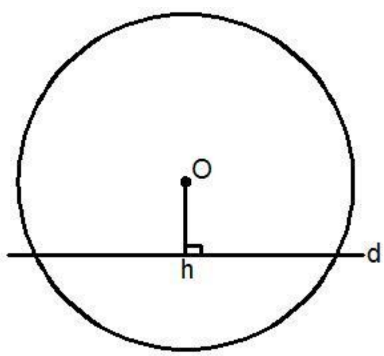
در این حالت خط بر دایره مماس است. اگر خطی بر دایره مماس باشد، فاصله‌ی مرکز دایره از آن خط برابر شعاع دایره است. همچنین شعاع دایره در نقطه تماس، بر خط مماس عمود است.



$$Oh = r$$

- ➢ **خط و دایره دو نقطه مشترک دارند.**

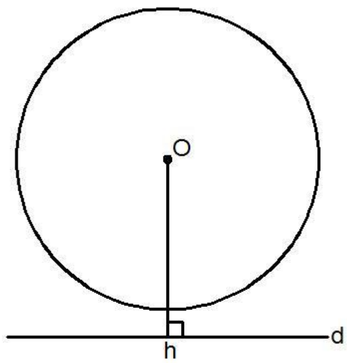
در این حالت خط، دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.



$$Oh < r$$

- خط و دایره نقطه مشترک ندارند.

در این حالت خط، دایره را قطع نمی‌کند.

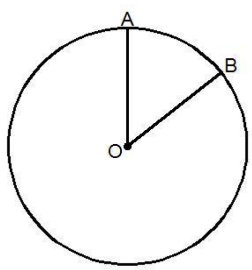


$$Oh > r$$

- ✓ **نکته** : اگر محیط دایره را به ۳۶۰ کمان مساوی تقسیم کنیم، اندازه هر کمان یک درجه خواهد بود.
- ✓ **نکته** : واحد درجه برای اندازه‌گیری یک زاویه و هم برای اندازه‌گیری کمانی از دایره به کار می‌رود.

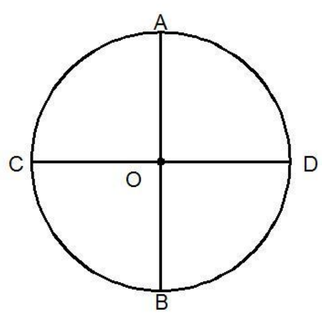
زاویه مرکزی

زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع شده، اضلاع آن شعاع‌های دایره و اندازه آن برابر کمان روبروی آن است.



اندازه زاویه مرکزی AOB برابر با اندازه کمان AB است

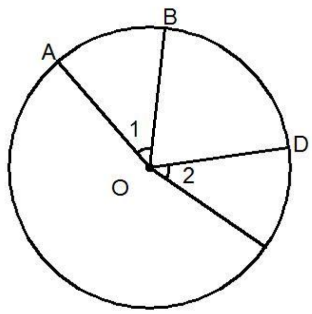
$$A\hat{O}B = AB$$



در شکل روبرو قطرهای AB و CD را رسم کرده‌ایم. بنابراین اندازه تمامی زاویه‌های مرکزی برابر ۹۰ درجه است. در اینصورت اندازه هر یک از کمان‌های روبروی هر زاویه مرکزی، ۹۰ درجه است.

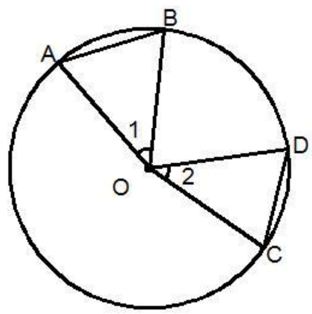
- ✓ اندازه زاویه‌های مرکزی AOD، ODB، OBC و OCA همگی ۹۰ درجه است.
- ✓ اندازه کمان‌های AD، DB، BC و CA همگی ۹۰ درجه است.

زوایای مرکزی مساوی



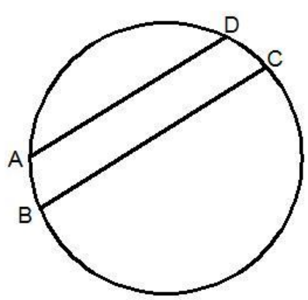
- ✓ اگر دو زاویه مرکزی با هم مساوی باشند، آن‌گاه کمان‌های مقابل آنها نیز برابرند و بالعکس.

$$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$



- ✓ اگر دو زاویه مرکزی با هم برابر باشند وترهای مقابل آنها نیز با هم برابرند و بالعکس.

$$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \Leftrightarrow AB = CD$$



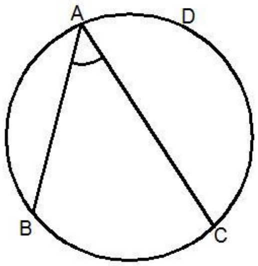
- ✓ کمانهای محصور بین دو خط موازی با هم برابرند و بالعکس.

$$AD \parallel BC \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

زاویه محاطی

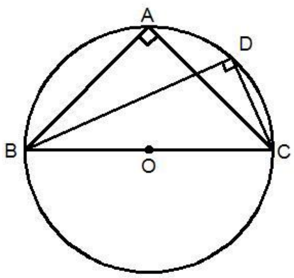
به زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره و اضلاع آن وترهایی از دایره باشد، زاویه محاطی گویند.

✓ اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف کمان مقابل آن می باشد.



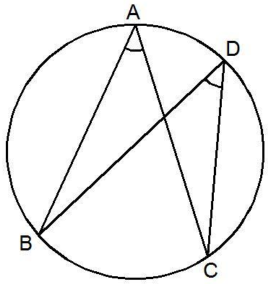
$$\hat{A} = \frac{BC}{۲}$$

✓ هر زاویه محاطی مقابل به قطر دایره، قائمه می باشد.



$$\hat{A} = \hat{D} = \frac{BC}{۲} = \frac{۱۸۰}{۲}$$

✓ زوایای محاطی روبرو به یک کمان با هم برابرند.

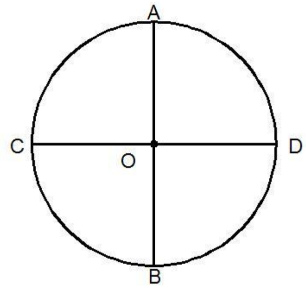


$$\hat{A} = \hat{D} = \frac{BC}{۲}$$

- اگر دو زاویه محاطی برابر باشند، کمان و وترهای مقابل به آن‌ها نیز برابرند و بالعکس.
- در هر دایره اگر دو وتر مساوی باشند، کمان‌های نظیرشان نیز مساوی‌اند و بالعکس.

تقسیم دایره به کمان‌های متساوی

۱. تقسیم دایره به چهار کمان متساوی



اگر در یک دایره دو قطر عمود بر هم را رسم کنیم، آنگاه چهار زاویه مرکزی مساوی ۹۰ درجه ایجاد شده و چهار کمان ۹۰ درجه هم ایجاد شده است، پس دایره را به چهار کمان مساوی تقسیم کرده‌ایم.

۲. تقسیم دایره به شش و سه کمان متساوی

دایره‌ای به شعاع دلخواه رسم کنید (مثلاً ۲ سانتیمتر)، دهانه پرگار را به اندازه شعاع دایره باز کنید و با شروع از یک نقطه روی محیط دایره، پی در پی کمان‌هایی بزنید، به این ترتیب دایره را به ٦ قسمت متساوی تقسیم کرده‌اید. اگر دو کمان متوالی از شش کمان را یک کمان بگیرید، دایره به ۳ کمان متساوی تقسیم شده است.

چند ضلعی منتظم

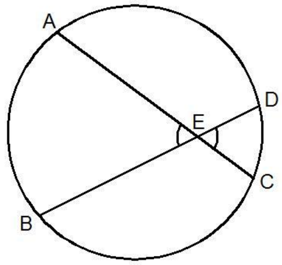
چند ضلعی‌هایی که اندازه اضلاع و اندازه همه‌ی زاویه‌ها با هم مساوی باشد، آنگاه این چند ضلعی را منتظم گویند.
سه ضلعی منتظم، مثلث متساوی‌الاضلاع است که تمامی زوایای آن برابر ٦٠ درجه است.
چهار ضلعی منتظم، مربع است که تمامی زوایا برابر ۹۰ درجه است.
اندازه‌ی هر زاویه داخلی یک n ضلعی منتظم برابر است با : $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}$
مثلاً اندازه هر زاویه ۵ ضلعی منتظم برابر است با:

$$n=۵ \Rightarrow \frac{(۵-۲)\times ۱۸۰}{۵}=\frac{۳\times ۱۸۰}{۵}=۱۰۸$$

چند ضلعی محدب

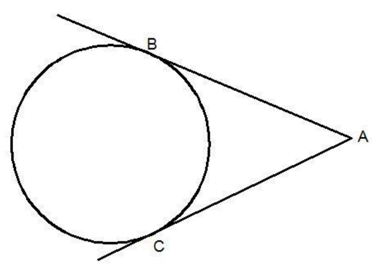
به هر چند ضلعی که تمام زوایای آن کوچکتر از ۱۸۰ درجه باشد، یک چند ضلعی محدب یا کوژ گویند.

اندازه‌ی زاویه E در شکل زیر طبق رابطه زیر بدست می‌آید:



$$E = \frac{DC + AB}{۲}$$

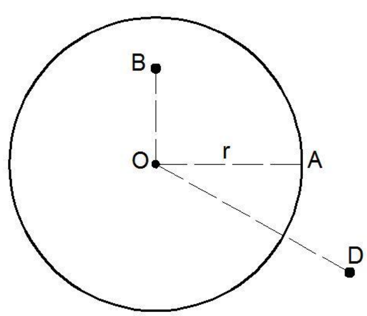
از هر نقطه خارج از دایره، ۲ مماس بر دایره می‌شود رسم کرد که با هم برابرند.



$$AB = AC$$

❖ *تمرین در کلاس*

۱. شعاع دایره زیر برابر ۲ است. در جای خالی نمادهای <=> را که مناسب است بنویسید.

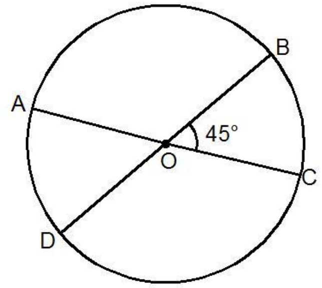


OA......۲

OB.......۲

OD.......۲

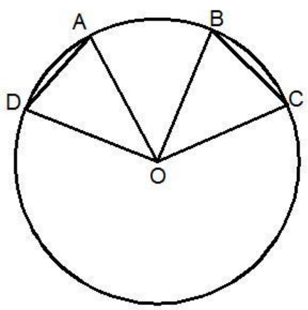
۲. AC و BD دو قطر دایره هستند. اندازه هر یک از کمان‌ها را بنویسید.



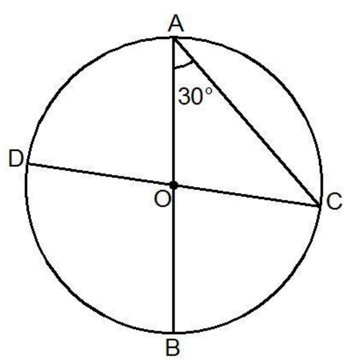
۳. وترهای BC و AD با هم مساوی‌اند.

الف: چرا مثلث‌های OAD وOBC متساویند؟

ب : آیا کمان‌های AB و CD متساویند؟



٤. در شکل مقابل اندازه‌های زاویه‌ی محاطی C، زاویه مرکزی BOC و اندازه‌ی کمان BC را تعیین کنید؟



۵. جملات درست را مشخص کنید؟

- **بزرگترین وتر در دایره قطر است.**
- **شکلی را منتظم گویند که فقط زاویه‌های آن با هم مساوی باشند.**
- **زوایای محاطی روبرو به یک کمان مساوی هستند.**

- اندازه هر زاویه مرکزی نصف کمان روبروی آن است.
- در یک دایره وترهای نظیر کمان‌های مساوی با هم برابرند.
- مثلث متساوی الضلاع یک سه ضلعی منتظم است.
- مربع یک چهار ضلعی منتظم است.

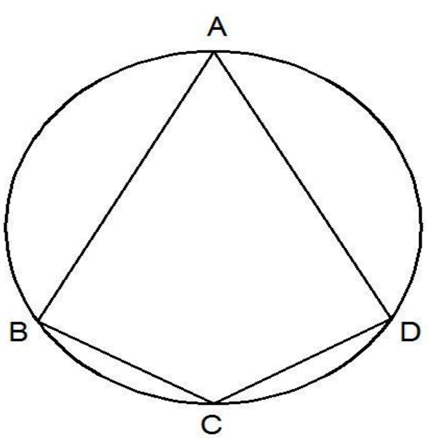
٦. عبارتهای زی را با کلمات مناسب پر کنید.

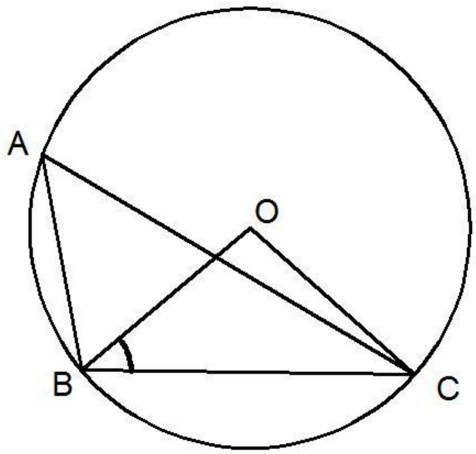
- شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس .... است.
- در یک دایره اندازه زاوی محاطی .... کمان روبروی آن است.
- پاره‌خطی که به دو سر کمان محدود می‌شود .... نام دارد.
- پاره‌خطی که از مرکز گذشته و دایره را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند .... نام دارد.
- اگر در دایره‌ای دو وتر مساوی باشند کمان‌های نظیر آن دو وتر .... هستند.
- اگر خطی دایره را در هیچ نقطه‌ای قطع نکند آنگاه فاصله مرکز دایره تا خط .... از شعاع است.

۷. در شکل‌های زیر زوایا و کمان‌های خواسته شده را بدست آورید.

- کمان BCD و کمان BAD
- زاویه C

$A = ۶۰^{\circ}$





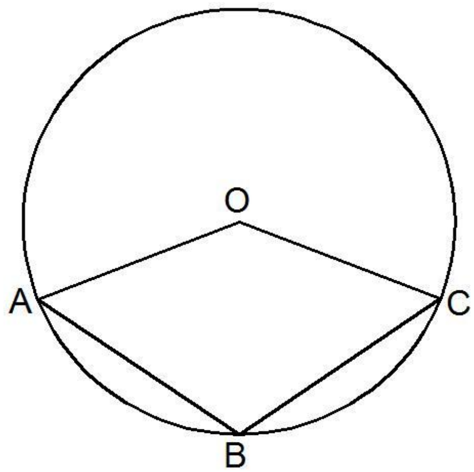
$B = ۳۰^{\circ}$

$\hat{O} =$

$\hat{A} =$

BC =

$O\hat{C}B =$



$\hat{O} = ۱۰۰^{\circ}$

$\hat{B} =$

BDC =