به نام خدا

معادله و مسائل توصیفی

مهسید روزه دار

www.kanoon.ir

CamScanner

• خب اول بریم سراغ اینکه اصلا معادله چیه ؟!

معادله یک نوع تساوی جبری (که در متوسطه اول با عدد آشنا شدید) و دارای مقادیر مجهول می باشد که به ازای عدد یا اعدادی خاص برقرار می شود.

جواب یا ریشه معادله هم که همون عدد یا اعداد خاص هستند.

مثال :

$$3x+1=10 \rightarrow 3x=10-1 \rightarrow 3x=9 \rightarrow x=3$$

$x=3$ ← جواب یا ریشه

www.kanoon.ir

CamScanner

معادله درجه اول

قالب این معادله به شکل روبه رو است:

$$ax+b=0$$

برای حل این نوع معادله باید مجهول x را به یک طرف و اعداد را به طرف دیگر ببریم و در مرحله آخر عدد معلوم را بر ضریب مجهول (مثلا در قالب بالا a) می کنیم.

مثال:

$$5x-20=-3x+4$$

$$5x+3x=20+4$$

$$8x=24$$

$$x=\frac{24}{8}=3$$

www-kanoon-ir

CamScanner

• اگر هم نخواهیم جواب این نوع معادله را سریعتر بیابیم می‌توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$x = -\frac{b}{a}$$

• یک نکته مهم هم داریم که فیده:

جواب معادله در معادله صدق می‌کند، به این معنا که اگر به جای x در مثال بالا $\frac{8}{}$ قرار دهیم تساوی برقرار می‌شود.

www.kanoonir

CamScanner

مسائل توصیفی

تا اینجا راجع به معادله درجه یک صحبت کردیم که قبلش یک لقمه حاضر و آماده می نوشتند جلوتون و ما هم سه سوته جواب رو تحویل می دادیم...

اما حالا میخواهیم بریم سر مسائل این بخش که زیر بناش همون معادله درجه یکه... و فقط کافی است جای مجهول یا ی مسئله x و یا هر متغیر دیگه ای قرار بدیم و بعد

قبل اسلایید قبلی که همتون یاد دادم حلش کنیم.

www.karnoon.ir

CamScanner

۱. عددی بیابید که اگر از ۳ برابر آن یک واحد کم کنیم حاصل برابر با ۲۶ گردد.

$$3x - 1 = 26$$

$$3x = 27$$

$$x = 27/3 = 9$$

۲. طول و عرض یک مستطیل به نسبت ۳ به ۱ می‌باشد، اگر محیط مستطیل ۶۴ باشد، مساحت آن چقدر است؟

عرض $= x$

طول $= 3x$

محیط $= 2(3x + x) = 64 \rightarrow 4x = 32 \rightarrow x = 8$

مساحت $= 8 \times 3 = 24$ (طول) $\rightarrow 24 \times 8 = 192$

www-kanoon-ir

CamScanner

(تست)

۱. سه برابر یک واحد بیشتر از عددی، از نصف قرینه آن، ۲ واحد بیشتر است. این عدد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $-\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $-\frac{۲}{۷}$

پاسخ = ۴

همان طور که گفتیم مجهول را x در نظر می‌گیریم. سپس گام به گام طبق داده‌ها مسئله معادله درجه یک تشکیل می‌دهیم.

$$۳(x+۱) = -\frac{x}{۲} + ۲$$

$$۳x + ۳ = -\frac{x}{۲} + ۲$$

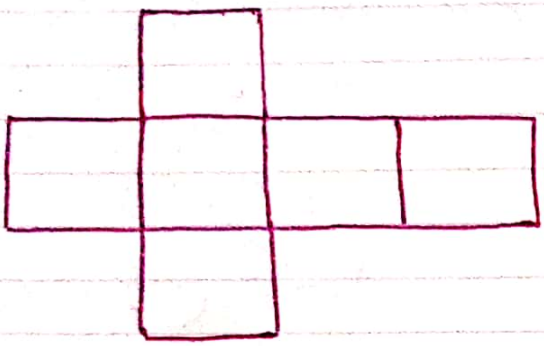
$$\frac{۷}{۲}x = -۱$$

$$x = -\frac{۲}{۷}$$

www-kanoon-ir

CamScanner

۲. شکل روبه‌رو باز شده‌ی یک مکعب است. اگر عدد محیط و مساحت این شکل با هم برابر باشد، طول هر ضلع مکعب کدام است؟



۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۷}{۳}$

۳) $\frac{۷}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۶}$

پاسخ = ب ـ ۲

طول تمام اضلاع را x می‌گیریم. پس مساحت برابر می‌شود با ۶ ضرب در مساحت مربع ۴. برای بدست آوردن محیط هم کافی است مجموع طول پاره خط ۴ی دور شکل را محاسبه کنیم و در آخر دو مقدار را با هم برابر قرار دهیم.

$$۶x^۲ = ۱۴x$$

$$۶x^۲ - ۱۴x = ۰$$

$$۲x(۳x - ۷) = ۰ \longrightarrow x = ۰ \quad ✗$$

$$\longrightarrow x = ۷/۳ \quad ✓$$

شاید برایتون سوال بشه که چرا صفر جواب نشد. اما من یک سوال ازتون می‌پرسم تا خودتون متوجه بشید. ما چطور می‌تونیم با ضلع ۰، یا هرون هیچ مکعب بالا را سازیم؟

www.kanoon.ir

۳. اگر ریشه‌های معادله $(x+a)(x-3b)$ برابر ۲ و $-\frac{4}{3}$ باشد، a و b هر دو اعدادی صحیح باشند حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ = گزینه ۲

$$(x-3b)(x+a)=0$$

$$\begin{cases} x-3b=0 \\ x+a=0 \end{cases}$$

$$3b=x \qquad -a=x$$

$$3b=-4 \qquad b=-\frac{4}{3} \qquad -a=2 \qquad a=-2$$

$$b-a=-\frac{4}{3}-(-2)=\frac{2}{3}$$

www.kanoon.ir

CamScanner

به نام خدا

ریاضی و آمار دهم

حل معادله درجه ۲ و کاربرد ۴

تهیه کننده : مهسید روزه زار

www-kanoon-ir

CamScanner

خب دوستان عزیز!

طبق روال، اول باید ببینیم شکل و قیافه این نوع معادله چطور است.

$$ax^2+bx+c=0 \quad , \quad a\neq 0$$

ببینید تو خط ٤، به شرط آخر خیلی خوب توجه کنید. اگر a صفر باشد، x^2 را هم صفر می‌کند و دیگر درجه ۲ نداریم.

- در قالب بالا a و b و c هر سه نمایش دهنده یک عدد خاص هستند.

این از بحث مقدماتی، ... کم کم بریم سر حل!!

www.k-kanoon.ir

CamScanner

روش های مختلفی برای حل معادله درجه ۲ وجود دارد؛ که البته در حل تست ها گاهی از ما می خواهند به روش مد نظر حلو برویم و گاهی هم بر عهده خودمان می گذارند؛ پس همه روش ها را خوب یاد بگیرید.

۱) روش تجزیه

شما برای تجزیه، نیاز مند به برخی پیش نیاز ها هستید که قبل از ورود به ریاضی دهم باید آن ها را بلد باشید؛ آن هم بحث اتحاد ها است. پس بیایید چند خاصیت مهم را با هم مرور کنیم.

www.kanoon.ir

CamScanner

۱) اگر حاصل ضرب دو یا چند عدد صفر شده باشد، حداقل یکی از آن‌ها صفر است.

$ab=0 \rightarrow a=0$ یا $b=0$

۲) خاصیت فاکتورگیری از آن خواص کاربردی است که اثر مواقع کارمان را راه می‌اندازد.

مثال: $3x^2-8x=0 \quad x(3x-8)=0$

۳) استفاده از دگیر اتحادها مثل فزدوج، جمله مشترک، چاق و لاغر و ...

مثال: $x^2-9=0 \quad (x-3)(x+3)=0$ اتحاد مزدوج

مثال: $x^2-5x+6=0 \quad (x-2)(x-3)=0$ اتحاد جمله مشترک

www.kanoon.ir

CamScanner

۲) روش مربع کامل

یکی از پیش نیازهای این روش، اتحاد مربع است { تو پرانتز قالب این اتحاد رو بنویسم جهت یاد آوری ☺ }

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

حالا اصل روش را گام به گام توضیح می دهم:

۱. ابتدا ضریب x^2 را یک می کنیم

۲. سپس نصف ضریب x را به توان ۲ می رسانیم. حالا همین مقدار را یک بار جمع و یک بار کم می کنیم.

۳. با یک دسته اتحاد مربع می سازیم و طرف دیگر تساوی را به چپ منتقل می کنیم.

www.konoon.ir

CamScanner

٤. از دو طرف جذر می‌گیریم و معادله حاصل را حل می‌کنیم.

• مثال

$$2x^2 - 8x - 10 = 0$$

$$\div 2 \rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\left(\frac{-4}{2}\right)^2 = \boxed{4}$$

$$x^2 - 4x + 4 - 5 - 4 = 0$$

$$(x^2 - 2)^2 = +9$$

$$x^2 - 2 = \pm 3$$

$$\begin{cases} x - 2 = 3 \rightarrow x = 5 \\ x - 2 = -3 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

www.kanoon.ir

CamScanner

۳) روش دلتا (Δ) ، مین ، روش کلی

دوستان این روش هم بسیار بسیار کاربردی است و به درد جایی می‌خورد که در بن بست گیر کرده‌ایم و هیچ کدام از روش‌های بالا به کارمان نمی‌آیند.

- فرمول رو به رو را خوووب به خاطر بسپارید

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

یادتون میاد گفتم a و b و c همان اعداد هستند؟! خب این جا باید اعداد را جایگزین فرمول بالا کنیم!

بعد از محاسبه Δ باید از طریق رابطه $\left\{ x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$ جواب یا ریشه‌های معادله را بدست بیاوریم.

www.kanoon.ir

CamScanner

● لازم می دونم چند نکته اضافی را همین جا خدمت شما عرض کنم:

△ در کل می تواند سه حالت داشته باشد

۱) $\Delta > 0$ دلتا، دو ریشه حقیقی دارد

۲) $\Delta = 0$ دلتا، ریشه مضاعف (دو ریشه یکسان) دارد

۳) $\Delta < 0$ دلتا، ریشه حقیقی ندارد

● مثال

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(-3) = 25 + 24 = 49 > 0 \rightarrow \text{دو ریشه حقیقی}$$

$$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5+7}{4} = \boxed{3}$$

$$x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5-7}{4} = -\frac{2}{4} = \boxed{-1/2}$$

www.kanoon.ir

CamScanner

۴) این روش اسم خاصی ندارد و فقط جاهایی کاربرد دارد که معادله ما در ظاهر خیلی بزرگ و سخت به نظر می‌رسد. این جا کافی است که متغیر تکرار شونده را مثلا m نام‌گذاری کنیم و حالا با ظاهر ساده‌تر به حل آن بپردازیم.

فقط حواستان باشد که آخر سر تبدیل ۴ را انجام دهید.

مثال

$$2\underbrace{(3x+2)}_{m}^{2} - 5\underbrace{(3x+2)}_{m} + 3 = 0$$

$$2m^2 - 5m + 3 = 0 \rightarrow m = 3/2 \text{ و } 1$$

$$3x+2 = \frac{3}{2} \rightarrow x = -1/4$$

$$3x+2 = 1 \rightarrow x = -1/3$$

www.konoor.ir

CamScanner

نکات اصلی درس به پایان رسید • حالا چند نکته تستی را با هم بخوانیم :

! قبل از حل معادله درجه ۲ ، نگاهی به ضرایب آن بیندازید. اگر روابط زیر برقرار بود دگیر نیازی به حل نداریم ☺

الف) $a+b+c=0$ ← فقط دو جواب ۱ و c/a همیشه برقرار است.

$2x^2-5x+3=0$ ↷ $a=2$ $b=-5$ $c=3$ ↶

$2-5+3=0$

ب) $a+c=b$ ← دو جواب -1 و $-\frac{c}{a}$ همیشه برقرار است.

$3x^2+10x+7=0$ ↷ $a=3$ $b=10$ $c=7$ ↶

$3+7=10$

www-kanoon-ir

CamScanner

۲) نوشتن معادله درجه دوم از طریق ریشه های آن

این جا فقط کافی است قالب زیر را به خاطر بسپارید و اعداد را جایگزین کنید.

$x^2 - Sx + P = 0$ {S → مجموع ریشه ها ، P → ضرب ریشه ها}

● مثال معادله درجه دومی با ریشه‌های ۲ و ۸- ؟

$S = -4$ ، $P = -16$

$x^2 + 4x - 16$

www.konkoon.ir

CamScanner

۳) این دو رابطه‌ی که الان برایتون می‌نویسم هم خیلی در تست ها و چه سیا کنکور به دردتون خواهد خورد ...

S = جمع ریشه‌ها $= x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

P = ضرب ریشه‌ها $= x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها $= |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$

$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3SP$

www.kanoon.ir

CamScanner

کاربرد در مسائل

این قسمت هم، همان طور که مسائل معادلات درجه یک گفتیم، شکل پیچیده تر معادله درجه ۲ است و فقط با حل مسائل متعدد می توانید مهارت پیدا کنید.

www-kanoon.ir

CamScanner

تست

۱. در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ ، اگر $b^2-4ac=121$ ، $a=2$ و $b=-1$ باشد، اختلاف ریشه های معادله کدام است؟ (متوسط)

۱) ۳٫۵ ۲) ۴٫۵ ۳) ۵٫۵ ۴) ۶٫۵

پاسخ: گزینه ۳

در صورت سوال، متوجه می شویم که از روش دلتا کمک گرفته است.

$$\Delta=b^2-4ac=121 \quad , \quad a=2 \quad , \quad b=-1$$

$$x_1=\frac{-(-1)+\sqrt{121}}{2\times 2}=\frac{1+11}{4}=3$$

$$x_2=\frac{+1-\sqrt{121}}{2\times 2}=\frac{1-11}{4}=\frac{-10}{4}=\frac{-5}{2}=-2,5$$

$$\text{اختلاف ریشه ها}=3-(-2,5)=5,5$$

www.kanoon.ir

CamScanner

۲. معادله $(2x+1)^2 = x^2 + k$ ، ریشه حقیقی ندارد. مجموعه k کدام است؟ (متوسط)

۱) $k > -\frac{1}{3}$ ۲) $k < -\frac{1}{3}$ ۳) $k > 3$ ۴) $k < 3$

پاسخ = گزینه ۲

همان طور که در درس‌نامه اشاره کردیم، $\Delta < 0$ جواب حقیقی ندارد.

ابتدا معادله را استاندارد می‌کنیم.

$$(2x+1)^2 = x^2 + k \rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = x^2 + k \rightarrow 3x^2 + 4x + \underbrace{(1-k)}_{c} = 0$$

a ، b

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(3)(1-k) = 16 - 12 + 12k = 12k + 4$$

$$\Delta < 0 \rightarrow 12k + 4 < 0 \rightarrow 12k < -4 \rightarrow k < -\frac{1}{3}$$

www.kanoon.ir

CamScanner

۳. جواب های کدام معادله ۴ واحد بیشتر از جواب های معادله $5x^2 - 20 = 0$ است؟ (دشوار)

۱) $x^2 + 3x + 2 = 0$

۲) $x^2 - 6x + 8$

۳) $x^2 - 8x + 12 = 0$

۴) $x^2 - 4x + 3 = 0$

پاسخ = گزینه ۳

$5x^2 - 20 = 0$ $\quad 5x^2 = 20$ $\quad x^2 = \frac{20}{5} = 4$ $\quad x = \pm 2$

ریشه گزینه جواب باید به صورت $\begin{cases} 2+4=6 \\ -2+4=2 \end{cases}$ هستند:

حالا به جای محاسبه تک تک گزینه ها، از همان روش تستی که گفتم جلو می رویم:

$S = 6 + 2 = 8$

$P = 6 \times 2 = 12$

$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow \boxed{x^2 - 8x + 12 = 0}$

www.kanoon.ir

CamScanner

به نام خدا

معادلات شامل عبارت های گویا

تهیه کننده: مهشید روزه دار

www.karnoon.ir

CamScanner

مثل روال قبل ، اول می ریم سراغ تعریف ...

▲ عبارت هایی که صورت و مخرج شان چند جمله ای باشد = عبارت گویا

مثال : $\frac{1}{2x^2 - x + 4}$ و $\frac{x^2 - 1}{x + 2}$

▲ خب حالا اگر معادله ای شامل عبارت های گویا شود معادلات گویا نامیده می شود.

! همان طور که در معادله های درجه اول و دوم چند روش حل به شما دوستان ارائه دادیم ؛ در این بخش هم چند راه حل مطرح می کنیم.

www.kanoon.ir

CamScanner

روش اول

قبل حل یک معادله، تمام عبارات را به یک سمت می بریم، سپس مخرج مشترک می گیریم و صورت کسر را مساوی صفر قرار می دهیم.

▲ سعی کنید در صورت امکان، مخرج و صورت هر کسر را تا حدی که می توانید ساده کنید و سپس میان کسرها، مخرج مشترک بگیرید.

● یک کسر زمانی صفر می شود که صورتش صفر باشد. چون می دانید که اگر مخرج کسری صفر شود، اصطلاحاً به آن تعریف نشده می گوییم.

● پس با توجه به نکته بالا، از بین جواب های معادله، جواب یا جواب هایی را می پذیریم که مخرج را صفر نکند.

www.karnoon.ir

CamScanner

• چند مثال برای روش اول

؟ مجموع ریشه‌های معادله $\frac{x}{x-1}+\frac{x^2-1}{x^2+x}=3$ را بدست بیاورید.

$$\frac{x}{x-1}+\frac{x^2-1}{x^2+x}=3$$

$x^2-1=(x-1)(x+1)$

$x^2+x=x(x+1)$

$$\rightarrow \frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x} \xrightarrow[\text{مشترک}]{\text{مخرج}} \frac{x^2+x^2-2x+1}{x(x-1)}=3$$

طرفین وسطین

$$\frac{2x^2-2x+1}{}=\frac{3x^2-3x}{} \rightarrow x^2-x-1=0$$

$$S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-1)}{1}=1$$

www-kanoon-ir

CamScanner

روش دوم

در این روش ما یک راست می رویم سراغ مخرج ها تا عبارتی را پیدا کنیم که وقتی در کل کسر ضرب می شود آن ها را از بین ببرد؛ حالا مجموعه ای از صورت ها برایمان می ماند که مثل یک معادله ساده اقدام به حل آن می کنیم.

- سعی کنید از روش های اتحادها فاکتورگیری و تجزیه به کمک آن ها به خوبی استفاده کنید!

www.kanoon.ir

CamScanner

• مثال برای روش دوم

▲ حاصل عبارت مقابل را بدست آورید.

$$\frac{x}{x-2} - \frac{5}{x+2} = \frac{10}{x^2-4}$$

عبارت مشترک $= (x-2)(x+2)$

$$\frac{x}{x-2}(x-2)(x+2) - \frac{5}{x+2}(x-2)(x+2) = \frac{10}{x^2-4}(x-2)(x+2)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 5x + 10 = 10 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \begin{cases} x(x-3) = 0 \\ x = 0 \checkmark \\ x = 3 \checkmark \end{cases}$$

• هر دو جواب صحیح است چون هیچ یک مخرج را صفر نمی‌کند!

www.kanoon.ir

CamScanner

تست

۱. مجموع ریشه‌های معادله $\frac{۲x-۱}{x+۲} - \frac{x-۳}{x-۲} = \frac{۲}{۳}$ کدام است؟ (سراسری ۹۹)

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲

پاسخ گزینه ۴

از روش دوم این سوال را حل می‌کنم: عبارات باید در $۳(x-۲)(x+۲)$ ضرب شوند

$$\frac{۲x-۱}{x+۲}(۳)(x-۲)(x+۲) - \frac{x-۳}{x-۲}(۳)(x-۲)(x+۲) = \frac{۲}{۳}(۳)(x-۲)(x+۲)$$

$$\rightsquigarrow ۳(۲x^۲ - x - ۴x + ۲) - ۳(x^۲ - ۳x + ۲x - ۶) = ۲(x^۲ - ۴)$$

$$\rightsquigarrow ۶x^۲ - ۱۵x + ۶ - ۳x^۲ + ۳x + ۱۸ = ۲x^۲ - ۸$$

$$\rightsquigarrow x^۲ - ۱۲x + ۳۲ = ۰$$

مجموع ریشه‌ها $= S = \frac{-b}{a} = \frac{۱۲}{۱} = \boxed{۱۲}$

www.konkoor.ir

CamScanner

۲. قدرمطلق تفاضل ریشه‌های معادله $\frac{x-۳}{x-۴}+\frac{۱}{۲x-۲}=\frac{۲}{۳}$ کدام است؟ خارج ۹۹

۱) ۴ ۲) ۴٫۵ ۳) ۵ ۴) ۵٫۵

پاسخ گزینه ۲

مخرج‌ها = ۳ ، $۲(x-۱)$ ، $x-۴$

حاصل ضرب مخرج‌ها = $۶(x-۴)(x-۱)$

$$\frac{x-۳}{x-۴}(۶)(x-۴)(x-۱)+\frac{۱}{۲(x-۱)}(۶)(x-۴)(x-۱)=\frac{۲}{۳}(۶)(x-۴)(x-۱)$$

$$\rightsquigarrow ۶(x^۲-۳x-x+۳)+۳x-۱۲=۴(x^۲-۴x-x+۴)$$

$$\rightsquigarrow ۶x^۲-۲۴x+۱۸+۳x-۱۲=۴x^۲-۲۰x+۱۶$$

$$\rightsquigarrow ۲x^۲-x-۱۰=۰$$

قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها $=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{۸۱}}{|۲|}=۹/۲=۴٫۵$

www.kanoon.ir

CamScanner

۰۳ ریشه بزرگ‌تر معادله کسری $\frac{۴x}{x-۱} + \frac{x-۱}{۳x} = ۳$ کدام است؟ سراسری ۹۰

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ گ ۲

$$\frac{۴x}{x-۱} + \frac{x-۱}{۳x} = ۳$$

$$\rightsquigarrow \frac{۴x(۳x)+(x-۱)(x-۱)}{۳x(x-۱)} = ۳$$

$$\rightsquigarrow \frac{۱۹x^۲ - ۲x + ۳}{۳x^۲ - ۳x} = ۳$$

ضرب اوسطین

$$\rightsquigarrow ۱۹x^۲ - ۲x + ۳ = ۹x^۲ - ۹x$$

$$\rightsquigarrow ۱۰x^۲ + ۷x + ۳ = ۰ \xrightarrow[\text{دلتا}]{\Delta} \frac{-۷ \pm \sqrt{۹}}{۲(۱۰)} \Rightarrow x_۱ = -\frac{۱}{۲}$$

$x_۲ = -\frac{۱}{۵}$ ✓

www.kanoon.ir

CamScanner

«به نام خدا»

ریاضی و آمار دهم

مفهوم تابع و ضابطه جبری

تهیه شده = مرصید روزه دار

www.kanoon.ir

CamScanner

ما با موقعیت‌های مختلفی در زندگی روبه رو می‌شویم که روابطی بین آن‌ها موجود است؛ مثلا رابطه بین زمان سپری شده با میزان مسافت طی شده توسط یک اتومبیل!

مثلا در مثال بالا زمان را x و مسافت را y در نظر می‌گیریم. اگر بخواهیم بدانیم هر ساعت با سرعت ۴ متر برثانیه حرکت می‌کند، رابطه زیر برقرار می‌شود:

$y = 4x$

▲ رابطه روبه رو یک رابطه خطی است که مثل یک معادله درجه یک است $\Leftarrow$

$y = ax + b$

www.karnoor.ir

CamScanner

• در رابطه خطی $y = ax + b$ ، x متغیر مستقل و y متغیر وابسته است؛ به این معنا که با تغییر x ، y هم تغییر می‌کند.

• برای نمایش رابطه‌ی خطی به صورت زوج مرتب عمل می‌کنیم: (x, y)

در زوج مرتب x مولفه اول و y مولفه دوم است.

نکته تستی: گاهی در تست ها به ما می‌گویند می‌خواهیم دو زوج مرتب برابر شوند؛ شرط لازم برای این کار این است که مولفه‌های اول را با هم و مولفه‌های دوم را با هم برابر قرار می‌دهیم.

www.kanoon.ir

CamScanner

▲ مثال

اگر دو زوج مرتب $(a-b, 3)$ و $(5, a+b)$ برابر باهم باشند. مقادیر a و b را بدست آورید.

• شما در متوسطه اول با نحوه تشکیل دستگاه آشنا شدید. این جا در ابتدا دو دستگاه تشکیل می دهیم.

$$\begin{array}{r} a-b=5 \\ a+b=3 \\ \hline 2a=8 \\ a=4 \end{array}$$

$$a+b=3 \longrightarrow 4+b=3 \longrightarrow b=-1$$

www.kanoon.ir

CamScanner

نکته تستی:

۱. هرگاه y قدر مطلق یا توان زوج داشته باشد تابع نیست.

۲. اگر x زیر رادیکال یا در مخرج بوده تابع درجه ۱ نیست.

www.kanoon.ir

CamScanner

"تابع"

در تابع به ازای هر مقدار x ، دقیقا یک مقدار برای متغیر y به دست می‌آید.

نکته = هیچ‌گاه x بیش از یک y نمی‌گیرد؛ در غیر این صورت تابع نیست.

روش‌های مختلفی برای نمایش تابع وجود دارد:

۱) نمایش زوج مرتبی
۲) نمایش جدولی
۳) نمایش پیکانی (نمایش با نمودار ون)
۴) نمایش مختصاتی

www.kanoon.ir

CamScanner

نمایش زوج مرتبی

نکته مهمی که در این جا باید به آن توجه شود این است که تنها در صورتی چند زوج مرتب می توانند x های متمایز داشته باشند که در همان حال y های آن ها نیز برابر باشد.

مثال = (۱,۴) (۲,۱۲) (۳,۱۵) (۱,$\sqrt{۱۶}$) ← تابع است

$\sqrt{۱۶}$ ↓ ۴

تابع نیست چون y های برابر ← (۱,۱۲) (۳,۱۳) (۲,۸) (۱,۵)

گرفته اند.

www.kanoon.ir

CamScanner

تفاضل جدول

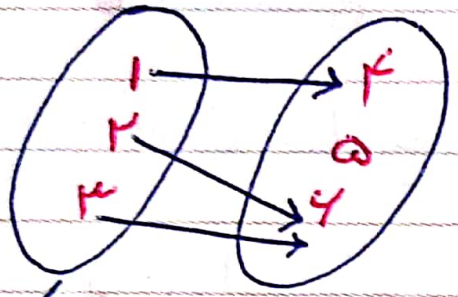
این روش هم تفاوتی با روش های دیگر **ندارد** ؛ یعنی شرط همان است که گفتیم با این تفاوت که متغیر ها را در این جا با جدول تفاضل می دهیم .

مولفه اول	x	۰	۱	...
مولفه دوم	y	۲	۳	...

www.kanoon.ir

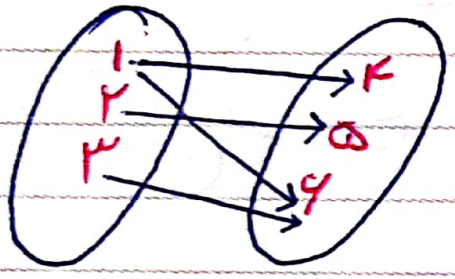
CamScanner

نمایش پیکانی = نمودار ون



به شکل زیر به دقت توجه کنید.

این شکل نمایش دهنده یک تابع است؛ چون هریک از مولفه های اول به یک مولفه دوم دریافت کرده است.



اما؛ این شکل دوم تابع نیست. چون ① دو پیکان گرفته است.

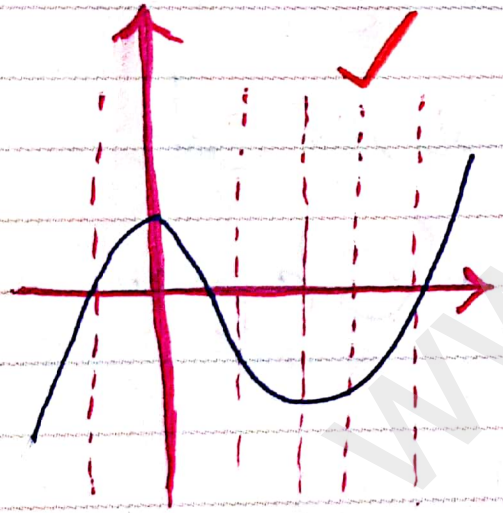
▲ فلا به سمت پیکان ها توسم هیچ پیکانی رسم نکنیم و خالی بماند اما همه x ها همواره باید به یک y وصل شوند.

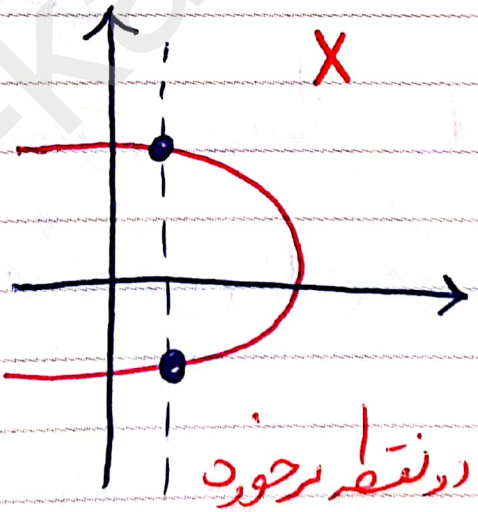
www.kanoon.ir

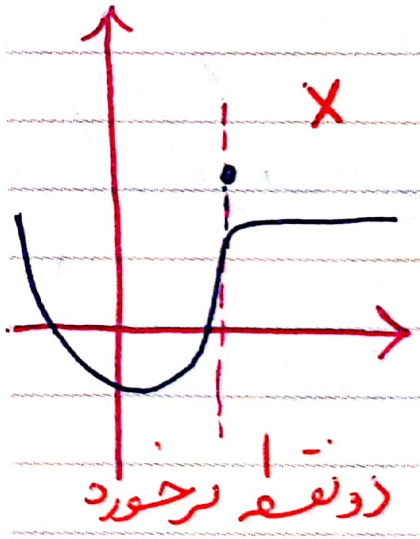
CamScanner

تعاریف مختصاتی :

اگر به ما مختصات بدهند و بخواهند مشخص کنیم آن چه رسم کرده اند تابع است یا نه باید یک خط موازی محور y ها رسم کنیم اگر بیش از یک نقطه تقاطع داشته باشد دیگر تابع نیست. از بین مختصات های زیر ببینیم کدامین تابع است ؟







www-kanoon.ir

CamScanner

• یک مبحثی را برایتان بررسی می‌کنیم چون خیلی سوال از آن طرح نشده فقط بدانید و فرمولش را به یاد داشته باشید.

۱ تعداد توابع از یک مجموعه به مجموعه ای دیگر

اگر مجموعه m دارای x عضو و مجموعه N دارای h عضو باشد تعداد توابع از مجموعه m به N برابر است با: h^x

• مثلا اگر $Z=\{0,1,4,9\}$ و $Y=\{1,5,9,13\}$ باشد، چند تابع از Y به Z داریم؟

$Y \to Z = 4^4$

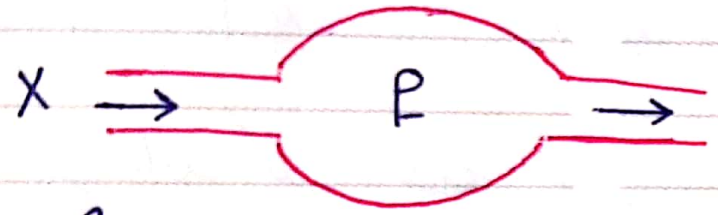
تعداد اعضای Y = ۴

تعداد اعضای Z = ۴

www.kanoon.ir

CamScanner

«ضابطه جبری»



به ماشین روبه رو تابع می‌گوییم.

همان طور که می بینید در ابتدا x وارد شده در اثر اتفاقاتی در داخل ماشین به F(x) یا y تبدیل شده است.

طبق قرارداد به آن اتفاق ضابطه (F) می‌گوییم. که اگر به سری x به آن بدهیم طبق یک قانون مشخص عمل می‌کند.

www.kanoon.ir

چند مثال برای ضابطه :

- در تمام ضوابط روبرو ، وجه مشترک این است که x مستقل ولی y وابسته به آن است .

$y = 2x + 3$

$y = -5x + 12$

$y = x + 7$

حالا در این قسمت کاهی سوالاتی طرح می‌شود که ضابطه را به ما می‌دهند و می‌گویند اگر مثلا $x=5$ باشد حاصل چند می‌شود . این جا باید بدانید که چون جواب معادله در آن صدق می‌کند ، این جا هم اگر به ازای همه متغیرها عددی مشخص قرار بدهیم در نهایت عبارت مد نظرمان را تولید می‌کند .

- به نکته جالب هم این است که $(x, y) \Leftarrow y = f(x)$ برابرند !

دامنه و برد

- دامنه به زبان ساده همان ورودی های تابع یا مولفه اول یا x است که می تواند بی نهایت عضو داشته باشد.
- برد هم همان خروجی های تابع یا مولفه دوم یا y است.
- در سوالات گاهی از ما دامنه را می خواهند که باید ضابطه را مساوی برد مان قرار بدهیم تا دامنه را معلوم کنیم، برعکس این کار هم اتفاق می افتد.

www.kanoon.ir

CamScanner

مثلا: ضابطه $= x^2+4$ ، مجموعه برد $= R\{4, 6, 8\}$

مجموعه دامنه $= D=\{0, \sqrt{2}, 2\}$ ← z چند می‌شود؟

طبق نکته گفته شده پیش می‌رویم:

$x^2+4=4 \rightarrow x=0$

$x^2+4=6 \rightarrow x^2=2 \rightarrow x=\sqrt{2}$

$x^2+4=8 \rightarrow x^2=4 \rightarrow \boxed{x=2}$

فقط (۲) را در D نداریم

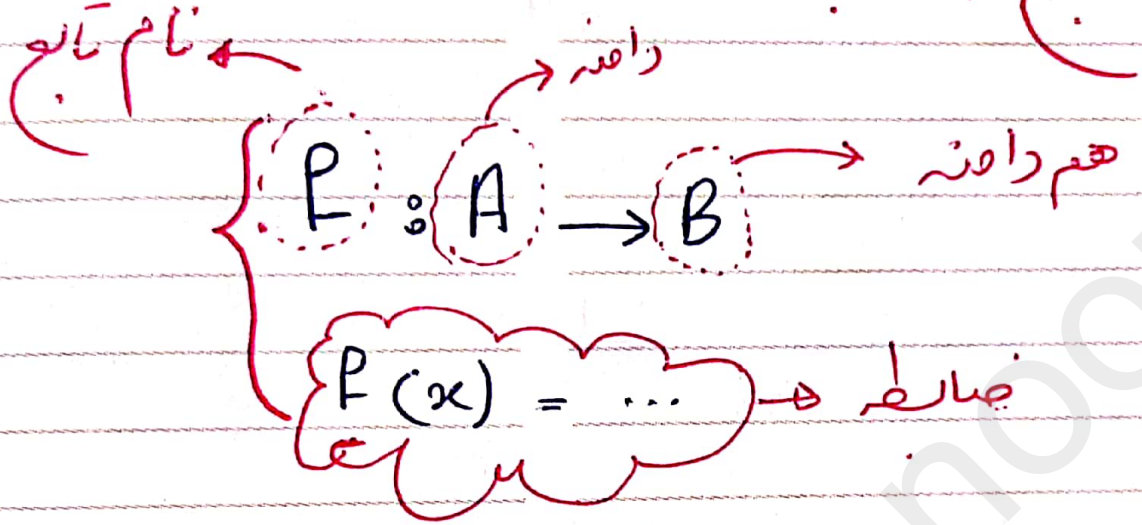
پس $z=2$

- طبق مثال بالا متوجه شدید که دامنه را با D و برد را با R نمایش می‌دهند.

www.kanoon.ir

CamScanner

« نمایش تابع با ضابطه »



$$f : A \to B$$

$$f(x) = \dots$$

بیشید دوستان!

هم دامنه هرچیزی می‌تواند باشد ، بستگی به فرض سوال دارد . مثلا می‌تواند $\mathbb{R}$ (حقیقی) ، $\mathbb{Z}$ (صحیح) ، $\mathbb{N}$ (طبیعی) یا $\mathbb{W}$ (حسابی) باشد.

www.kanoon.ir

CamScanner

« تست های کنکور »

۱. اگر رابطه $\{(3, a+2b), (5,4), (7,2), (3,7), (5, 2a-b)\}$ یک تابع باشد، a^2-b^2 کدام است؟ (سراسری - ۹۸)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ = گزینه ۳

اگر یادتون باشه یه مثالی تو همین وبلاگ ها توی درسنامه براتون آورده بودم. چون این عبارت یک تابع است پس باید هر x دقیقا یک y بگیرد اما می‌بینیم که ۵ و ۳ هرکدام دو y گرفته‌اند. بنابراین باید y هایشان را برابر قرار دهیم تا تابع تشکیل شود.

$(3,7) = (3, a+2b) \rightarrow a+2b=7$

$(5,4) = (5, 2a-b) \rightarrow 2a-b=4$

دستگاه را حل می‌کنیم پس:

$a+2b=7$ پس $a+2b=7$

$2a-b=4 \xrightarrow{\times 2} 4a-2b=8$

$5a=15 \rightarrow a=3$

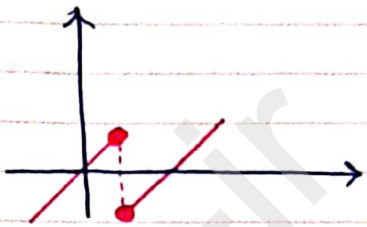
$a+2b=7 \rightarrow 3+2b=7 \rightarrow 2b=4 \rightarrow b=2$

$a^2-b^2 = 3^2-2^2 = 5$ ✓

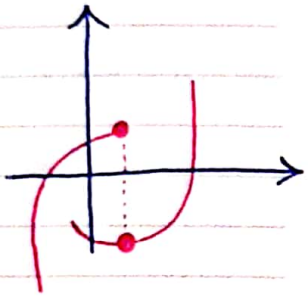
www.kanoon.ir

۲. کدام نمودار نمایش یک تابع $y = f(x)$ است؟ (خارج ۹۸)

۱)



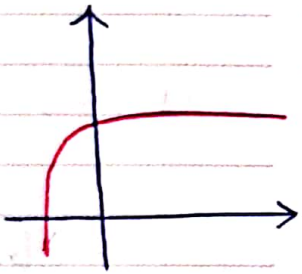
۲)



۳)

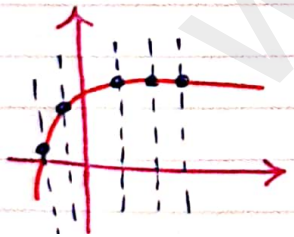


۴)



پاسخ ب ۴

گفتیم که یک نمودار زمانی تابع است که فقط با یک نقطه موازی محور y ها قطع شد



طبق این تعریف فقط در گزینه ۴ با یک نقطه خواهیم داشت.

www.kanoon.ir

CamScanner

۳۰. اگر $f(x)=\sqrt{x^2-7}$ باشد، $f(4)-f(2\sqrt{2})$ کدام است؟ (خارج ۹۵)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

این جا بحث جایگزینی مطرح است، باید به جای تمام xها اعداد مدنظر را قرار دهیم و بعد یک تفریق ساده انجام دهیم.

$$f(2\sqrt{2})=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-7}=\sqrt{8-7}=1$$

$$f(4)=\sqrt{4^2-7}=\sqrt{16-7}=\sqrt{9}=3$$

$$f(4)-f(2\sqrt{2})=3-1=2$$

www.kanoon.ir

CamScanner

۵۴- اگر $f(x)=x^2-3x+2$ و آنگاه $f(x+2)-f(x-2)$ برابر است؟ (خارج ۸۹)

۱) $4(x-3)$ ۲) $4(x-2)$ ۳) $4(2x-1)$ ۴) $4(2x-3)$

پاسخ: گزینه ۴

$$f(x+2)=(x+2)^2-3(x+2)+2=x^2+4x+4-3x-6+2$$

$$=x^2+x$$

$$f(x-2)=(x-2)^2-3(x-2)+2=x^2-4x+4-3x+6+2=x^2-7x+12$$

$$f(x+2)-f(x-2)=x^2+x-x^2+7x-12=8x-12=4(2x-3)$$

www.kanoon.ir

CamScanner

۵۰. اگر $f(x) = x\sqrt{2+|x|}$ باشد مقدار $f(2) + 4f(-\frac{1}{4})$ کدام است؟ (خارج ۹۲)

۱) ۲ ۲) ۲٫۵ ۳) ۳ ۴) ۳٫۵

پاسخ گ ۲

$f(2) = 2 \times \sqrt{2+|2|} = 2\sqrt{4} = 2 \times 2 = 4$

$f(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4} \times \sqrt{2+|-\frac{1}{4}|} = -\frac{1}{4} \times \sqrt{\frac{8+1}{4}} = -\frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = -\frac{3}{8}$

$f(2) + 4f(-\frac{1}{4}) = 4 + 4(-\frac{3}{8}) = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$

www.kanoon.ir

CamScanner

به نام خدا

مبحث نمودار تابع خطی

تهیه کننده: مهسید روزه دار

www.karnoon-ir

اول کار یه یادآوری می کنم بهتون که توابع خطی = معادله خط هست.

ببینید مجبورید! یکی از بخش هایی که حتما تست محوره و همچین خوراک سوالات تشریحی هست، شیب خطه!

شیب خط رو با حرف m نمایش می دیم و طبق رابطه زیر عمل می کنیم:

وقتی دو نقطه بر روی مختصات داشته باشیم، برای به دست آوردن شیب کافیه از این دو نقطه از این فرمول استفاده می کنیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

www.kanoon.ir

مثال: شیب خط گذرنده از دو نقطه $(-1, 4)$ و $(3, 8)$ را بدست آورید.

کافی است یکی از نقاط را با ① و دیگری را با ② مشخص کنید و سپس طبق فرمول عمل کنید.

$(4, -1) \rightarrow x_1 = 4 \quad , \quad y_1 = -1$

$(8, 3) \rightarrow x_2 = 8 \quad , \quad y_2 = 3$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-1)}{8 - 4} = \frac{4}{4} = 1$$

سوال = آیا همیشه به ما دو نقطه می دهند تا طبق آن ها فقط شیب را بدست بیاوریم؟ باید بگم خیر؛ چون گاهی خودشان به ما شیب خط را می دهند تا نقاط دیگر را ما حساب کنیم که با مثال های بعدی کمی جلوتر آشنا می شوید!

www.kanoon.ir

• حالا چرا نیاز به محاسبه شیب خط داریم؟

شما اگر حالت و قالب کلی معادله را در نظر بگیرید: $y = mx + b$

در این معادله خط m شیب را مشخص می‌کند. پس کلی از ارکان اساسی معادله خط همین m است.

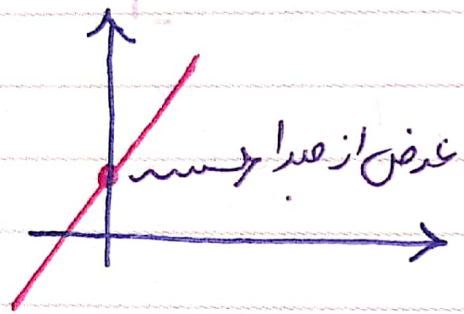
• در همان قالب بالا b چیست؟ b عرض از مبدا را مشخص می‌کند.

در ادامه به تعریف از اصطلاح می‌پردازیم.

www.kanoon.ir

• عرض از مبدا = به عرض نقطه برخورد خط با محور عرض ها (y) می گویند.

شکل:

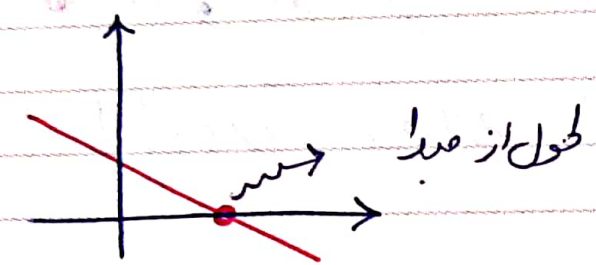


روش محاسبه: کافی است x را مساوی صفر قرار دهیم؛ همان طور که در شکل بالا مشاهده کردید، در نقطه مدنظر x=0 است.

www.kanoon.ir

○ طول از مبدا = به طول نقطه برخورد خط با محور طول ها (x) می گوییم.

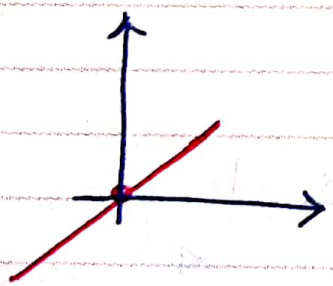
شکل ○



روش محاسبه ○ کافی است l را مساوی صفر قرار دهیم چون در این حالت l نداریم (مساوی صفر است).

■ نکته ■

اگر عرض از مبدا خطی صفر باشد، طول از مبدا آن نیز حتما صفر است.



و آن خط مبدا گذر است.

www-kanoon-ir

برای نوشتن معادله خط چه چیز نیاز است؟

۱- دو نقطه از همان خط

۲- یک نقطه از خط و شیب خط

۱. در این حالت باید با همان فرمولی که گفتیم ابتدا m را بدست آوریم؛ سپس طبق رابطه روبه رو، با انتخاب یکی از نقطه ها معادله خط را می نویسیم.

$$Y - y_1 = m(X - x_1) \quad \text{یا} \quad Y - y_2 = m(X - x_2)$$

• X و Y که به صورت حروف بزرگ نوشته می شوند ثابت اند و هیچ عددی را برای نوشتن معادله خط جایگزین آن ها نمی کنیم.

www.kanoon.ir

۲. در این جا کار مان راحت تر است. چون شیب را داریم. صرفاً اعداد را در فرمول معادله خط قرار می دهیم.

مثلا: معادله خطی که شیب آن ۵ و از نقطه (۱ و ۲) می گذرد را بنویسید.

$m = 5$

$x_1 = 2$ ، $y_1 = 1$

$Y - y_1 = m(X - x_1) \rightarrow Y - 1 = 5(X - 2) \rightarrow Y - 1 = 5X - 10$

پاسخ $\rightarrow Y = 5X - 9$

www-kanoon-ir

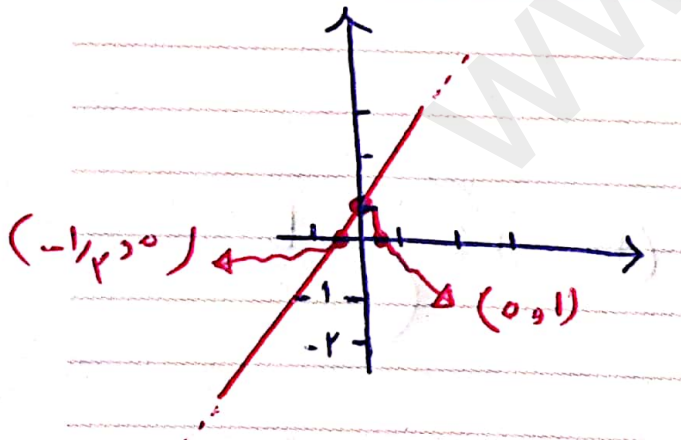
رسم خط:

اساسی ترین کار برای رسم یک خط، داشتن معادله آن خط است. سپس دو نقطه حداقل در آن معادله قرار می دهیم و خط را رسم می کنیم. البته آن چیزی که گفتم بیشتر به درد سوالات تشریحی و یا سوالات تستی در بار اول می خوره! روش تستی حل سریع را در ادامه بهتون می گم که باید گزینه ها را چک کنید!

• رسم خط $y = 2x + 1$

بهتر است که همیشه با صفر شروع کنیم.

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 1 \\ y = 0 \rightarrow x = -1/2 \end{cases}$$



www.konkoon.ir

روش تستی ۵: به ضریب x نگاه کنید. اگر مثبت بود خط به شکل ↗ رسم می‌شود

اما اگر منفی بود به شکل ↘ رسم می‌شود؛ هم‌چنین b اگر مثبت بود

بالای صفر در محور y ها واقع می‌شود و اگر منفی بود زیر صفر. این راه‌های

حدودی به سرعت شما را بسیار کمک می‌کند.

www.kanoon.ir

تابع خط : هر وقت این کلمه را شنیدید به یاد همان معادله خط بیفتید.

فقط به جای y در ضابطه به شما $f(x)$ می دهند.

مثلا =

(a, b) یعنی $f(a) = b$

$(5, 12)$ یعنی $f(5) = 12$

www.kanoon.ir

(تست)

۱. عرض از مبدا خط گذار بر دو نقطه $(-۲, ۳)$ و $(۱, ۲)$ کدام است؟ (خارج ۹۵)

۱) ۴ ۲) ۴٫۵ ۳) ۵ ۴) ۵٫۵

پاسخ: گزینه ۱

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۲ - (-۲)}{۱ - ۳} = \frac{۴}{-۲} = -۲$$

$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \rightarrow y - ۲ = -۲(x - ۱) \rightarrow y - ۲ = -۲x + ۲$$

$$y = -۲x + ۴ \rightarrow \text{عرض از مبدا}$$

www.kanoon.ir

۲. خط d از نقطه $A=(-۲,۴)$ و نقطه تلاقی دو خط به معادلات $۲x+y=۵$ و $۳y-x+۶=۰$ گذشته. شیب خط d کدام است؟ (سراسری ۹۷)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ = ب ۲

ابتدا محل تلاقی را با تشکیل یک دستگاه ساده به دست می‌آوریم.

$$\begin{array}{l} ۲x+y=۵ \\ -x+۳y=-۶ \xrightarrow{\times ۲} -۲x+۶y=-۱۲ \end{array}$$

$$۷y=-۷ \Rightarrow y=-۱ \ , \ x=۳ \Rightarrow (۳,-۱)$$

$$m=\frac{-۱-۴}{۳-(-۲)}=\frac{-۵}{۵}=-۱$$

www.kanoon.ir

به نام خدا

تابع درجه دو

تهیه کننده: فرهید روزه دار

www.karnoon.ir

CamScanner

▲ تابع درجه دو = سهمی

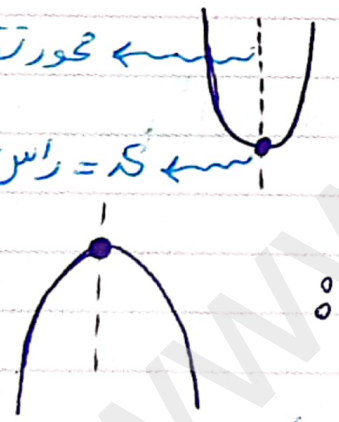
تابع درجه ۲ دارای ضابطه‌ای به شکل روبه رو است : ax^2+bx+c

البته یک شرط هم داره : $a \neq 0$

شکل سهمی :

سهمی یا همان تابع درجه ۲ را براساس ضریب x^2 دسته بندی می کنیم

اگر $a>0$ باشد سهمی روبه بالا رسم می‌شود :



اگر $a<0$ باشد سهمی روبه پایین رسم می شود :

به اولی اصطلاحاً مینیمم (min) می‌گویند و به دومی ماکزیمم (max)

www.kanoon.ir

لحظه ۱۴!

○ در سهمی چند رابطه را باید خیلی خوب بلد باشید!

مختصات راس سهمی = S ← $S=\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$

نکته تستی ☼

☼ گاهی در بعضی از سوالات از شما مینیمم یا ماکسیمم را می‌خواهند! تنها کافی است رابطه $\frac{-\Delta}{4a}$ را درست بیاورید و یا $\frac{-b}{2a}$ را درست آورده و آن را در ضابطه قرار دهید تا همان جواب را به شما بدهد.

☼ فکر کنم خودتان فهمیدید که $x=\frac{-b}{2a}$ و $y=\frac{-\Delta}{4a}$ است.

www.kanoon.ir

CamScanner

وقتی ضابطه سهمی را به شکل $f(x)=a(x-h)^2+k$ به ما می دهند؛ بدانید که نقطه (h,k) راس سهمی است و دیگر نیازی به محاسبه ندارید!

مثلا: $f(x)=3(x-1)^2+5 \leftarrow (5\text{و}1-) \rightarrow y=5$ و $x=-1$

نتیجه!

اول محور تقارنی که براتون مشخص کردم خیلی کاربرد داره در سوالات چهارگزینه‌ای و حواستون همیشه باشه.

www.kanoon.ir

CamScanner

بیاید این جا تا باهم یه مثال قشنگ حل کنیم:

$y = -3x^2 + 12x + 6$ (a, b, c)

دارم برا تون همه چیو جدا می کنم تا مورد ازماست نکشم بیرون !!

$$S_{(x,y)} \Rightarrow \begin{cases} x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-3)} = \boxed{2} \\ y_s = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(12^2 - 4(-3)(6))}{4(-3)} = \frac{-216}{-12} = \boxed{18} \end{cases}$$

بیند دوستان! برای راحتی کار {چون گاهی دلتا گرفتن یه کمی زمان بره} می تونید همان مقداری که برای x_s بدست آوردید را در ضابطه های x ها قرار بدهید و دقیقا همان y_s را بدست می آورید.

www.konoon.ir

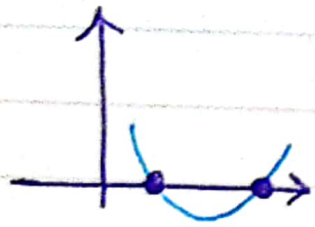
CamScanner

چگونه می‌توانیم تقاطع سهمی را محور مختصات درست بیابیم؟

این تقاطع می‌تواند حالات مختلفی داشته باشد. مثلا به صورت تقاطع با محور عرض‌ها یا طول‌ها و یا حتی تقاطع با سهمی دیگر و یا نیز خط!

الف) تقاطع با محور طول‌ها:

اگر سهمی با محور x ها برخورد داشته باشد، عرض آن صفر می‌شود مثل شکل زیر:



www.kanoon.ir

CamScanner

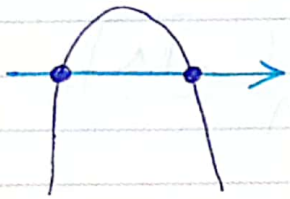
بنابراین طبق نکته‌ای که گفتیم و دانستیم که همیشه در برخورد با x ها، $f(x)=0$ می‌شود.

اما من این جا می‌خواهم برای یک شباهت را وسط بگذارم:

چه‌ها! سهمی مثل معادله درجه ۲ است؟ $ax^2+bx+c=0$

پس برای حل آن می‌توان از نکات Δ استفاده کرد:

۱) اگر $\Delta>0$ باشد، معادله دارای دو جواب، سهمی دارای ۲ نقطه برخورد با محور xها است.



۲) اگر $\Delta=0$ باشد، معادله دارای ۱ جواب، سهمی مماس با محور xها است.



۳) اگر $\Delta<0$ باشد، معادله جواب حقیقی ندارد، سهمی محور xها را قطع نمی‌کند.



www.kanoon.ir

CamScanner

خب! حالت بعدی تقاطع با محور y هاست: این حالت دقیقا برعکس حالت قبلی است، یعنی این جا باید x را صفر بگذاریم تا $f(x)$ بدست بیاید.

$$ax^2+bx+c=0 \xrightarrow{\text{اگر } x=0} a(0)^2+b(0)+c=\boxed{c}$$

پس همیشه نقطه برخورد با y ها به شکل $(0,c)$ است.

www.kanoon.ir

CamScanner

آخرین حالت هم این است: حالت استاندارد را هرگز فراموش نکنید. اگر در سوالی جای y و x را جابه جا کرده بود، خودتان آن را به شکل استاندارد در بیاورید مثلاً:

$y - x + 1 = 0 \longrightarrow$ غیر استاندارد

$\hookrightarrow y = x - 1 \rightarrow$ با جابجایی: استانداردش می‌کنیم!

خب حالا در این تیپ سوالات کافی است که هر معادله‌ای به ما دادند، y آن را حذف و عبارت را صفر قرار بدهیم.

نقاط تقاطع سهمی $y - x^2 - 4x = 2$ و خط $y + 4 = -x$ را بدست آورید.

ابتدا استاندارد می‌کنیم.

$y - x^2 - 4x = 2 \rightarrow y = x^2 + 4x + 2$

$y + 4 = -x \rightarrow y = -x - 4$

$x^2 + 4x + 2 = -x - 4 \rightarrow x^2 + 5x + 6 = 0$

$(x+2)(x+3) = 0$

$x = -2, -3$

کافی است x ها را در یکی از معادلات قرار دهیم تا y آن ها را نیز محاسبه کنیم.

$(-1, -3)$ $(-2, -2)$

www.karnoon.ir

CamScanner

روش رسم سهمی:

① ابتدا مختصات راس را پیدا کنید. $S = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$

② حالا یک نقطه قبل و بعد راس را بنویسید (سعی کنید فاصله یکسان باشد تا ل ها یکی در بیایند).

③ حالا با نقاطی که بدست آوردیم سهمی را رسم می‌کنیم.

www.kanoon.ir

CamScanner

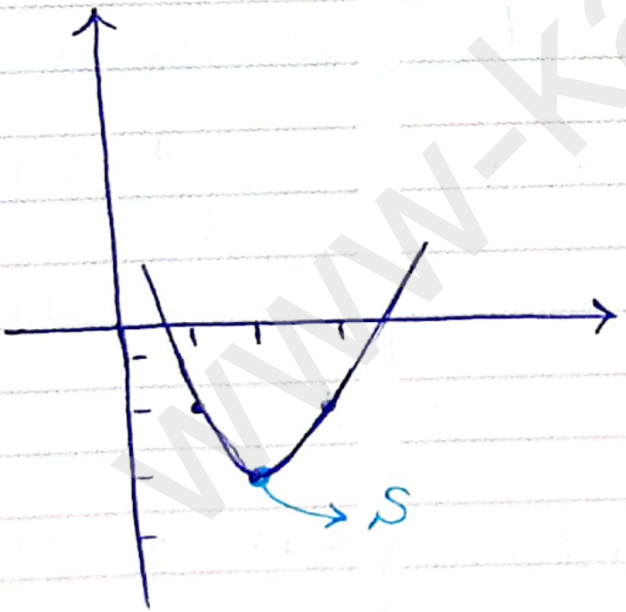
مثال

$f(x) = x^2 - 4x + 1$

راس $= \quad x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2$

$y_s = (2)^2 - 4(2) + 1 = 4 - 8 + 1 = -3$

	s | ۲	۳
۱	۲ - ۳	۲ -



www-kanoon.ir

CamScanner

تعیین علامت a

گاهی اوقات شما برای حل سهمی می‌توانید به راحتی پاسخ را بدست بیاورید. آن هم با تعیین علامت a و b و c.

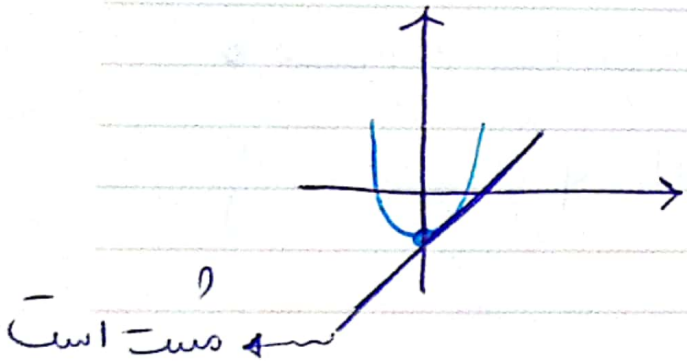
- علامت a که خیلی ساده است؛ کافی است بینیم سهمی رو به بالاست (+) یا رو به پایین (-) است.
- علامت c هم آسونه! ببینید نقطه برخورد با محور y ها بالای صفر است (+) یا پایین صفر است (-)

www.kanoon.ir

CamScanner

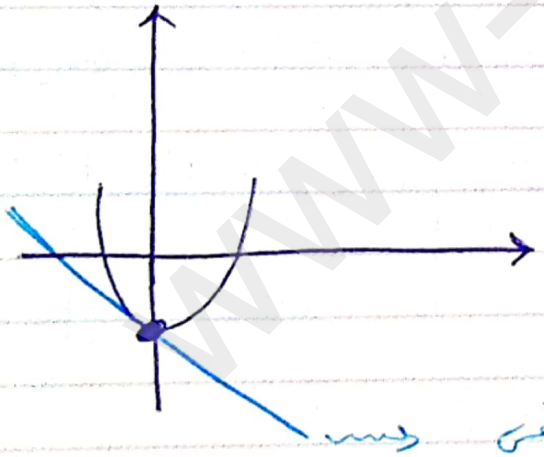
• اما تعیین علامت b تقریبا از همه دشوارتر است. شما دو راه حل برای انجام این کار دارید. اول آن که از طریق $x = \frac{-b}{2a}$ تعیین علامت کنید چون علامت a را به راحتی در آورده اید.

دوم آن که از روی شکل تعیین کنید. یعنی بالا ببینید علامت سَت خط مماس بر سهمی در نقطه برخورد با ل ها کجاست.



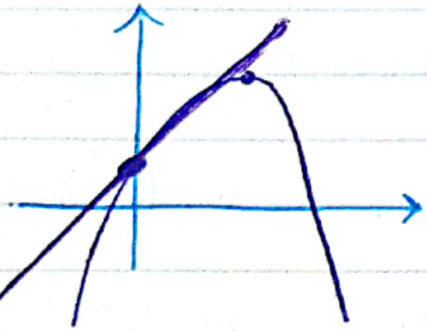
ل مثبت است

b > 0

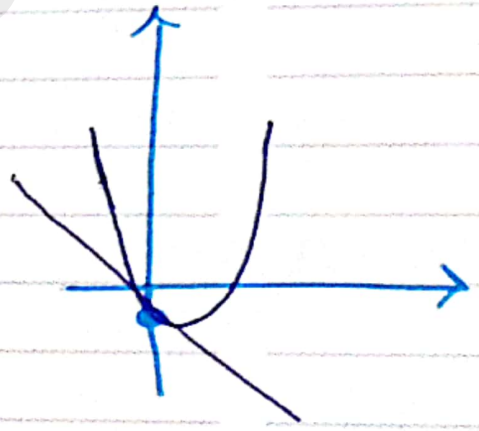


b < 0 ... منفی ...

مثال: علامت سهمی های زیر را تعیین کنید.



$a<0$ ، $c>0$ ، $b>0$



$a>0$ ، $c<0$ ، $b<0$

www-kanoon-ir

CamScanner

خب بچه ها!

تا این جا هرچه گفتیم به صورت مستقیم تابع یا همان سهمی را از ما می خواستند. اما بدانید که مسائل مختلفی در این حالات طرح می کنند که شما حتما باید آن را مشخص و حل کنید.

• بیشترین مساحت از بین مستطیل هایی که محیط آن ها ۶۰ است برابر است؟

{x = عرض / y = طول}

$$\square \text{محیط} = (x+y)\times 2 = 60$$

$$\boxed{x+y=30}$$

همین جا بین خودتون بگم برابرون که همیشه بیشترین حالت به صورتی به دست می آید که ما مقدار را دقیقا نصف کنیم و پس وقتی برای مساحت آن ها را در هم ضرب می کنیم max حاصل می شود:

$$x+y=30 \longrightarrow 30/2 = 15$$

$$x=y=15$$

$$15\times 15 = (225)$$

www.kanoon.ir

CamScanner

یه دسته دیگه از مسائل هم هستند که نامشان مسائل بازاریابی است. چند عبارت زیر را حتما یاد بگیرید.

$P(x)$ = تابع سود

$R(x)$ = تابع درآمد

$C(x)$ = تابع هزینه

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

سود = درآمد − هزینه

www.kanoon.ir

CamScanner

این درست از مسائل خیلی راه خاصی برای حل ندارد و فقط باید تیپ سوالات را ببینید تا با آن آشنا شوید.

- تعداد × هزینه هر کالا + هزینه ثابت = هزینه
- تعداد کالا × قیمت فروش هر کالا = درآمد

نقطه سربه‌سر = نکته این است که هر وقت سود صفر بود یعنی درآمد و هزینه با هم برابرند، این نقطه را داریم؛ یعنی نه سود کرده‌ایم و نه ضرر.

چند نکته ضروری و مهم:

نقطه وسط A و B $= \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

فاصله $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

www-kanoon-ir

CamScanner

(تست)

۱۰ فاصله‌ رأس سهمی به معادله $y = 2x^2 - 3x + 4$ از نقطه $A(19/4 \text{ و } -1/8)$ کدام است؟ (سراسری ۹۷)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) ۶

پاسخ گزینه ۲

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2(2)} = \boxed{3/4}$$

$$y_S = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{4}\right) + 4 = \boxed{\frac{23}{8}}$$

www-kanoon-ir

CamScanner

حالا طبق فرمولی که گفتم عمل می‌کنیم:

$$S = \left(\frac{۳}{۴} \, , \, \frac{۲۳}{۸}\right)$$

$$A = \left(\frac{۱۹}{۴} \, , \, -۱\frac{۱}{۸}\right)$$

$$\begin{cases} AS = \sqrt{\left(\frac{۱۹}{۴} - \frac{۳}{۴}\right)^۲ + \left(-۱\frac{۱}{۸} - \frac{۲۳}{۸}\right)^۲} \\ = \sqrt{۱۶ + ۹} = \sqrt{۲۵} = ۵ \end{cases}$$

www.kanoon.ir

CamScanner

۲۰ نقطه $A(-۱, -۴)$ راس سهمی به معادله $y = ۳x^۲ + ax + b$ است.
این سهمی محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (سراسری ۹۰)

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۱- ۴) ۲

گزینه ۳

نقطه $(-۱, -۴)$ همان راس سهمی است در نتیجه

$x_S = -۱$

$y_S = -۴$

$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-a}{۶} = -۱ \rightarrow -a = -۶ \rightarrow a = ۶$

حالا جایگذاری می‌کنیم:

$y = ۳x^۲ + ۶x + b$

$y = ۳(-۱)^۲ + ۶(-۱) + b = ۳ - ۶ + b = b - ۳$

$b - ۳ = -۴ \rightarrow b = -۱$

$y = ۳x^۲ + ۶x - ۱ = c$. گفتیم که c نقطه برخورد با محور y هست

www.kanoon.ir

CamScanner

به نام خدا

کار با داده ها در آفاری

گردآوری داده ها - انواع متغیرها

مهشید روزه دار

www.karnoon.ir

دوستان عزیز!

تا این جا هرچه که خواندیم ریاضی بود! از این به بعد وارد بخش آمار می‌شویم که شاید اکثر بچه‌های انسانی با این بخش راحت‌تر باشند.

یک سری اصطلاحات در این درس‌ها قرار دارد که باید به صورت کاربردی یادشان بگیرید؛ یعنی چطور؟

به این صورت که در قالب حل مسئله باید تشخیص بدهید که مثلاً جامعه آماری، متغیر تصادفی، نوع متغیر، نمونه آماری و ... چیست.

همراه باشید...

www.kanoon.ir

* جامعه آماری: به کل افراد و اشیا که می خواهیم از لحاظ یک مسئله خاص آن ها را بررسی کنیم، جامعه آماری می گوییم.

* واحد آماری: به تک تک اعضای جامعه آماری گفته می شود.

* متغیر تصادفی: موضوع مورد مطالعه.

* سرشماری: این واژه خیلی برای شما آشناست. مثل سرشماری نفوس و مسکن. در این حالت همه اعضای جامعه آماری را مورد بررسی قرار می دهیم. اما این روش معایبی دارد: چه معایبی ؟!

۱) زمان بر بودن
۲) پرهزینه بودن
۳) در دسترس نبودن تمام اعضا
۴) کم و زیاد شدن حین سرشماری
۵) خطای زیاد
۶) عدم کاربرد در بررسی های مخرب.

www.kanoon.ir

موارد زیر تحت عنوان معایب ازشون یاد کردیم رو کمی توضیح می دهیم:

بررسی های محرز قبل بررسی ولتاژ و کیفیت لامپ های یک کارخانه.

یعنی شما نمی توانید تک تک لامپ ها رو ببرید امتحان کنید تا ببینید وقتی به چند ولتاژ می رسه می ترکه! این یعنی به همه واحدهاتون آسیب زدید و اصطلاحاً بررسی مخرب محسوب می شه!

کم و زیاد شدن هم مثل مرگ و میر بعضی از اعضا و یا زاد و ولد در یک منطقه!

www.kanoon.ir

راه حل: با توجه به مشکلات صفحه قبل دانستیم که باید به جای سرشماری از راه‌ی دیگر هم استفاده کنیم مثل: نمونه گیری.

* نمونه تصادفی: یک زیرمجموعه از همان جامعه آماری است. نکته مهم این است که باید حتما اعضای نمونه به صورت تصادفی انتخاب شوند.

نکته: شما در منطق هم این بحث را خواندید (استقرای تعمیمی) که همیشه باید در نمونه برداری، حواستان به اندازه نمونه باشد که نسبت مناسبی با اندازه کل جامعه داشته باشد!

www.kanoon.ir

* داده آماری : بعد از تمام شدن کار، چه در جامعه آماری و چه در نمونه گیری از آن، به نتیجه ای دست یافته داده آماری می گویند.

* آمارگیری :

داده های آماری را به ای روش می توان جمع آوری کرد ؛ هم چنین به فردی که این کار را انجام می دهد آمارگیر می گویند.

روش های جمع آوری داده ها :

۱) مشاهده و آزمایش
۲) مصاحبه
۳) پرسش نامه
۴) دارگان

www.kanoon.ir

۱) مشاهده و آزمایش = کاربردش زمانی است که نیاز به فرد پاسخگو نداریم

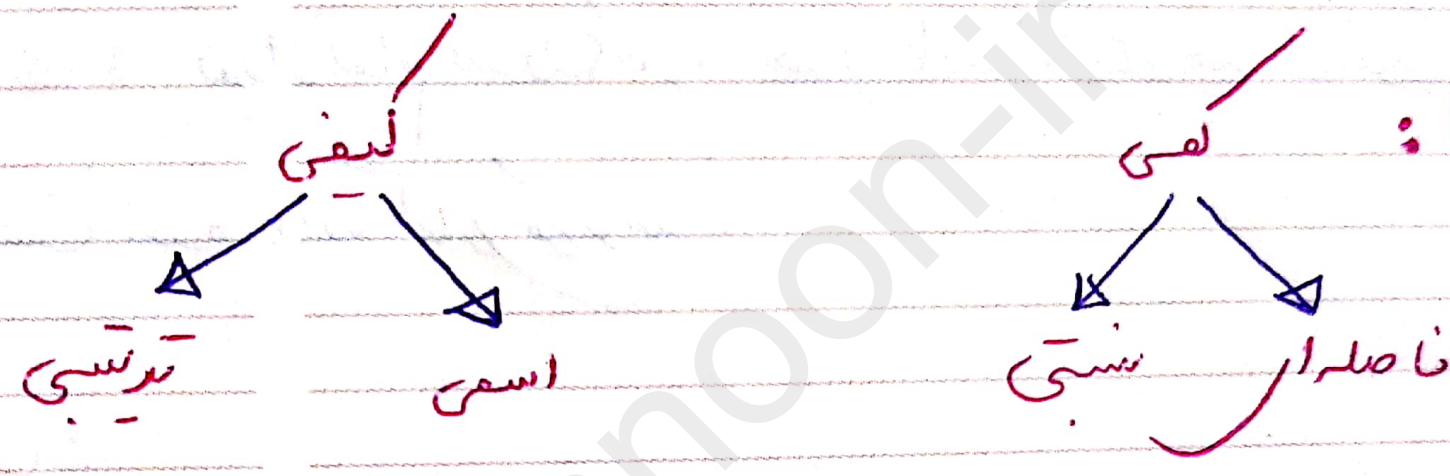
۲) مصاحبه = زمانی که شما نمی‌توانید پاسخ سوالات را پیش‌بینی کنید، نیاز به پرسش و پاسخ از فرد دیگری است. یا عبارتی نوعی پرسش شفاهی است.

۳) پرسش نامه = برخلاف مصاحبه، در این جا می‌دانیم پاسخ چه چیزهایی است. اما نکته مهم این است که در پاسخ‌ها از چند گزینه استفاده کنیم.

۴) رادگان = در این جا از اطلاعاتی استفاده می‌کنیم که از قبل جمع‌آوری شده‌اند اما همیشه موسسات اطلاعات ثبت شده را در اختیار ما قرار نمی‌دهند. با این حال این روش دقت بسیار بالایی دارد!

www.kanoon.ir

متغیرها:



متغیر کمی با کیفی چه تفاوتی دارد؟!

- متغیر کمی فقط از جنس عدد است اما متغیر کیفی عدد و غیر عدد است.
- عملیات ریاضی مثل جمع و ضرب در کمی ها موثر است ولی در کیفی ها بی معناست.

www.kanoon.ir

مقیاس اسمی = ترتیبی ندارند ، قابل مقایسه نیستند ، بیشتر در مورد اسامی ، نوع ی خونی ، پرچمیب ها ، ... کاربرد دارند . مثل رنگ چشم ، جنسیت

مقیاس ترتیبی = ترتیب دارد ، قابل مقایسه هستند ، گاهی عدد و گاهی غیر عدد . مثل مراحل رشد انسان ، مثل کیفیت غذا ، رتبه کنکور ، ...

مقیاس فاصله ای = علاوه بر قابلیت مقایسه ، اختلاف معنادار است ، صفر در این جا قرار دادی است . مثلا دمای هوا .

مقیاس نسبتی = قابل مقایسه ، اختلاف معنادار ، نسبت هم معنادار ، صفر واقعی است . مثل وزن ، تعداد ، نفره ، ... .

www.kanoon.ir

«پارامتر و آماره»

تفاوت ها = هردو مشخصه‌ی عددی هستند اما پارامتر شامل تمامی اعضای جامعه آماری است اما آماره فقط یک نمونه تصادفی از آن است.

نکته: بچه ها آماره معمولاً متغیر است اما پارامتر همیشه ثابت است.

نکته(۲): هنگامی که در مورد متغیرهای کیفی صحبت می کنیم، مقدار پارامتر و آماره به صورت **نسبی** مطرح می کنیم؛ اما هنگام بررسی داده های کمی از هر استفاده نمی کنیم بلکه برای یافتن پارامتر میانگین چند آماره را بدست می آوریم.

www.kanoon.ir

«علم آمار»

شما در کتاب درسی تان با یک تعریف روبه رو می شوید که چند کلید واژه مهم در آن هست. شما کتاب را بخوانید و زیر این کلید واژه ها خط بکشید.

{ نتیجه گیری ← تحلیل و تفسیر ← طبقه بندی ← جمع آوری داده ها }

در این بخش تست برایتون نذاشتم تا خودتون در کتاب های تست با انواع و اقسام آن آشنا شوید. چند تا دونه سوال که حل کنید دوال کار میاد دستتون.

موفق باشید

به نام خدا

معیارهای پراکندگی

مهشید روزه دار

www-kanoon-ir

همان طور که معیارهای مرکزی را دسته بندی کردیم، معیارهای پراکندگی را هم دسته بندی می کنیم.

- دامنه تغییرات
- دامنه میان چارکی
- انحراف معیار
- واریانس

▲ ما می گوییم معیار پراکندگی، بنابراین طبق این نام گذاری در صورتی که داده ها هم نزدیک تر باشند، عدد حاصل مربوط به معیار پراکندگی کوچک تر است و عین طور بالعکس.

▲ پس همین جا به نکته رو می گم بعضیا که توی تست ها خیلی پرکار برده! اگر داده ها همگی یکسان باشند، انحراف معیار و واریانس و سایر معیارهای پراکندگی صفر خواهد بود.

www.konoon.ir

دامنه تغییرات (R)

اول راه حل را به صورت ریاضی بنویسم:

$$R = \max - \min$$

($\max$: بیشترین، $\min$: کمترین)

و حالا به زبان خودمان، کافی است بزرگترین داده را منهای کوچک‌ترین داده ها کنیم.

مثلا دامنه تغییرات اعداد روبه را محاسبه کنید:

۲ (m)، ۳، ۵، ۶، ۸، ۱۱، ۱۷ (M)

$$R = M - m = ۱۷ - ۲ = ۱۵$$

▲ نکته: اگر همه داده ها در عددی ضرب یا تقسیم شوند، دامنه تغییرات در قدر مطلق آن عدد ضرب یا تقسیم می شود. اما یادتان باشد که کلا جمع و تفریق تاثیری روی R ندارد.

یادتونه گفتم اگر داده ها برابر باشند R آن ها هم صفر می‌شود، بیایید در قالب مثال ببینید:

$\{۵, ۵, ۵, ۵, ۵, ۵, ۵\}$ $\quad R = M - m = ۵ - ۵ = ۰$

www.kanoon.ir

واریانس و انحراف معیار (یا انحراف استاندارد)

این دو با یکدیگر رابطه تنگاتنگی دارند:

$$\text{انحراف معیار} = \sqrt{\text{واریانس}}$$

ابتدا فرمول واریانس را ببینید:

$$\text{واریانس } (S^2) = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_N-\bar{x})^2}{N}$$

حالا اگر از عبارت بالا جذر بگیریم، انحراف معیار حاصل می‌شود.

- به صورت خط بالا در زبان خودمان اختلاف داده‌ها از میانگین می‌گوییم و به مجموع تک‌تک عبارات مجموع مربعات اختلاف داده‌ها از میانگین گفته می‌شود
- همچنین اگر فراوانی هم داشتیم، کافی است هر فراوانی را پشت یا انتهای عبارت مربوطه ضرب کنیم.

www.kanoon.ir

• فرمول کلی واریانس را دیدیم اما سوالات همواره این طور نیستند که همه چیز را شسته رفته به ما بدهند بلکه باید با دست کاری در فرمول خودمان به راه حل صحیح برسیم.

اگر مجموع مربعات داده ها را با L نمایش دهیم ← $L = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2$

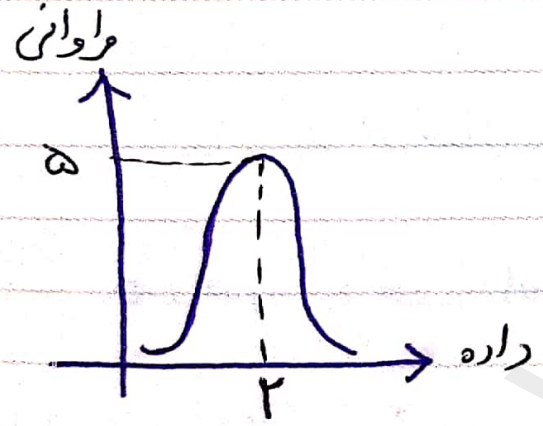
می توانیم واریانس را به صورت روبرو محاسبه کنیم. $\sigma^2 = \frac{L}{N} - \bar{x}^2$

▲ اگر داده هایمان با فاصله مساوی از یکدیگر قرار گرفته باشند می توانیم از فرمول دیگری برای بدست آوردن σ^2 استفاده کنیم. $\sigma^2 = d^2 \left(\frac{N^2 - 1}{12}\right)$

▲ و هم چنین اگر داده ها در عددی مثل m ضرب شوند، واریانس در m^2 و انحراف معیار در $|m|$ ضرب می شوند و هم چنان جمع و تفریق این جا معنا ندارد.

www.kanoon.ir

یک تیپ از مسائل این بخش مربوط می‌شود به مقایسه دو کالا با هم که بازار کدام ثبات بیشتری دارد. اصولا میانگین هر دو گروه را به شما یکسان می‌دهند. حالا کافی است واریانس یا انحراف معیار دو گروه بدست آورید و مقایسه کنید. عدد حاصل برای هرکدام کمتر باشد، یعنی پراکندگی کمتر و قاعدتا بازارش از ثبات بهتری برخوردار خواهد بود.



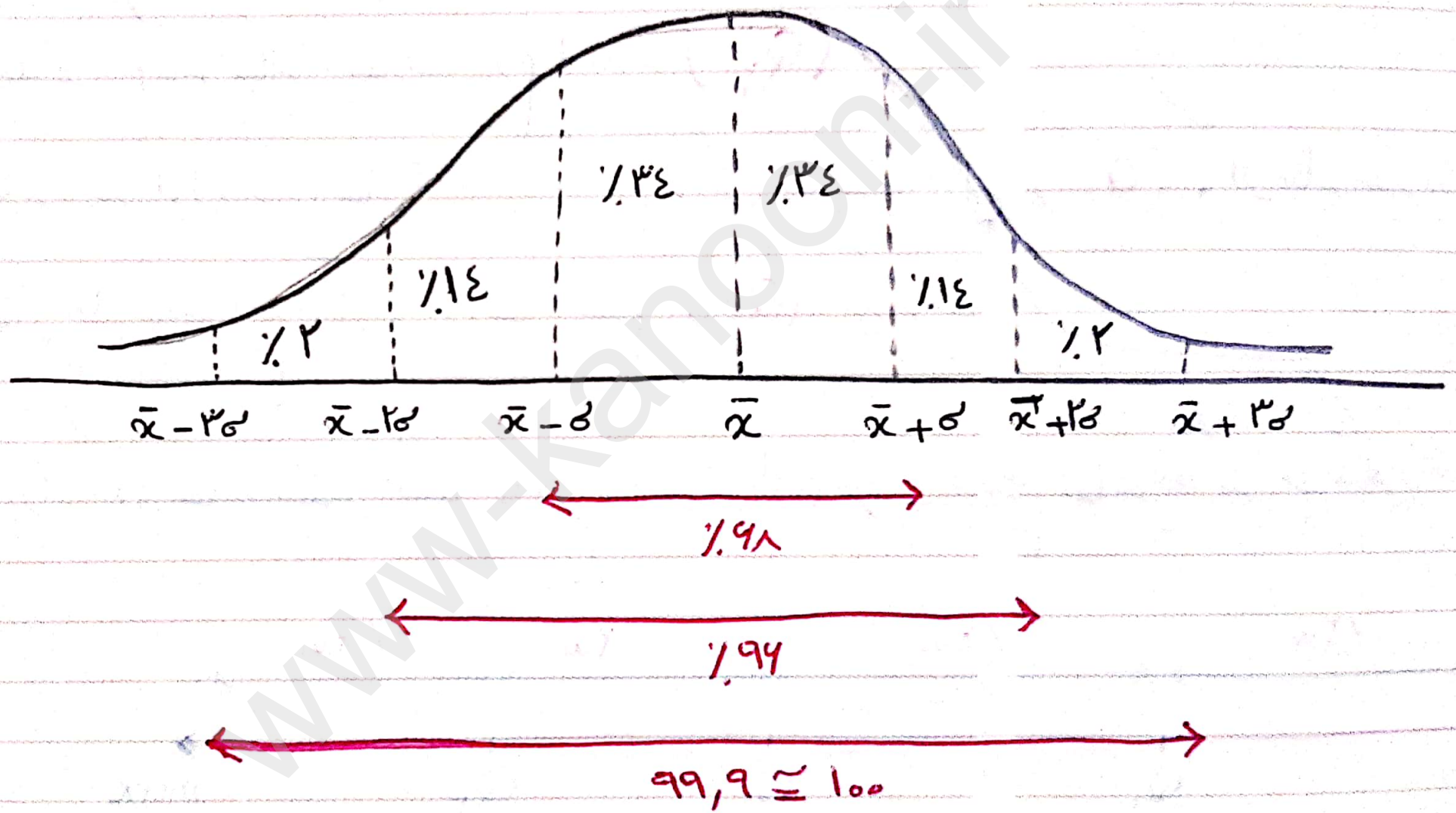
خم بهنجار = منحنی نرمال

در این منحنی همیشه میانگین و مد و میانه با هم برابرند.

مثلا در منحنی مقابل همگی برابر ۲ هستند.

www.kamoon.ir

به منحنی زیر و اعدادی که در آن نوشته شده است خوب توجه کنید :



www.kanoon.ir

خب؛ حالا چه نکاتی را می‌توان از منحنی بالا استخراج کرد؟

۱- تقریبا ٪۶۸ داده ها در بازه $(\bar{x}+\sigma , \bar{x}-\sigma)$ قرار دارند = فاصله یک برابر انحراف معیار از میانگین.

۲- تقریبا ٪۹۶ داده ها در بازه $(\bar{x}+2\sigma , \bar{x}-2\sigma)$ = فاصله ۲ برابر انحراف معیار از میانگین.

۳- تقریبا ٪۱۰۰ داده ها در بازه $(\bar{x}+3\sigma , \bar{x}-3\sigma)$ = فاصله ۳ برابر انحراف معیار از میانگین.

• در مسائل مربوط به مواد خوراکی معمولا از شما بازه ٪۹۶ را می‌خواهند؛ اما بدانید که در هر نوع سوالی در این مبحث به راحتی می‌توانید با رسم منحنی به پاسخ برسید.

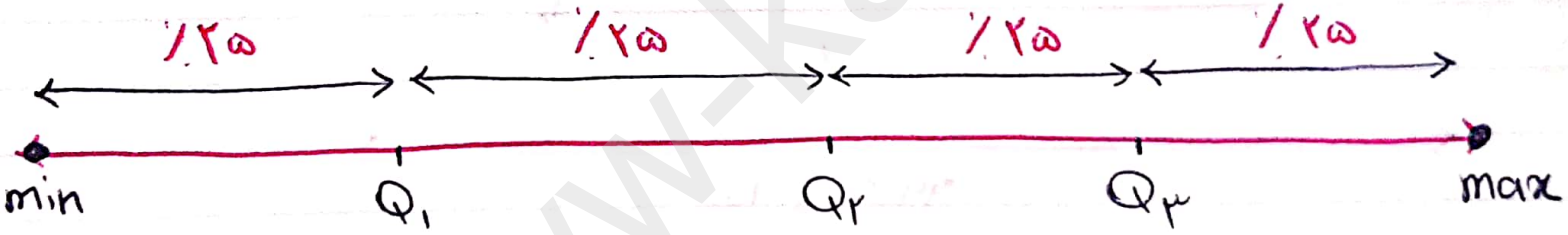
www.karnoon.ir

چارک ها - دامنه میان چارکی

می دانید که نام دیگر میانه، چارک دوم است (Q_2)

از میانه نیمه اول داده ها را محاسبه کنیم به آن چارک اول (Q_1) و از میانه نیمه دوم داده ها را محاسبه کنیم به آن چارک سوم (Q_3) می گویند.

حالا در نمودن های جلوتر بیشتر راجع به نمودار آن حرف می زنیم اما بدانید که چه شکلی است:



- در هر بازه از نمودار بالا ۲۵ درصد از داده ها جای می گیرند.

برای بدست آوردن دامنه میان چارکی (IQR) هم از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

www.konoon.ir

(نکات تکمیلی)

- در صورت وجود داده های دورافتاده به جای انحراف معیار از همین چارک ۴ استفاده می کنیم.
- در صورتی که تعداد داده ها مضرب ۴ نبود نیازی نداریم از واژه تقریبا استفاده کنیم.
- وقتی داده ها را مرتب کرده ایم و در پی عدد صحیح ضرب کنیم جای Q_1 و Q_3 با هم عوض می شوند.

www.kanoon.ir

به نام خدا

معیارهای گرایش به مرکز (حد وسط)

مهشید روزه دار

www.kanoon.ir

CamScanner

▲ اول باید بدونیم که معیار های گرایش به مرکز شامل چه مواردی است :

{ مد - میانگین - میانه }

مد چیست ؟!

به داده ای که در مجموعه بیشترین میزان فراوانی را داشته باشد ، مد می‌گویند مثلا در مجموعه {۸ ،۷ ،۷ ،۹ ،۹ ،۹ ،۶ ،۶ ،۵ ،۵} عدد ۹ مد است چون بیشتر از بقیه تکرار شده است . اما مد منحصر به فرد نیست یعنی ممکن است در یک مجموعه گاهی بیشتر از یک مد داشته باشیم به همین خاطر هم شاخص مهتری محسوب نمی‌شود . و حتی گاهی ممکن است یک مجموعه حتی همان یک مدهم نداشته باشد .

www.kanoon.ir

CamScanner

میانگین (معدل) :

این معیار خیلی برایتون آشناست. کلا هم یک فرمول ساده داره که شاید این جا چون با حروف انگلیسی می‌نویسم ظاهر ترسناکی داشته باشه.

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_n x_n}{N}$$

وقتی از هر عدد چند تا داشته باشید از رابطه بالا استفاده می‌کنید اما به طور عادی کافی است اعداد را با هم جمع و بعد تقسیم بر تعداد کنید.

مثلاً

۳ و ۳ و ۴ و ۴ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۸ و ۸

$$\frac{(2\times 3) + (3\times 4) + 5 + 6 + 7 + (3\times 8)}{11} = 5/45$$

www.kanoon.ir

CamScanner

چند نکته مهم در مورد میانگین:

۱) میانگین مجموعه‌ای از داده‌ها همیشه بین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین آن داده‌هاست.

$$min < \bar{x} < max$$

۲) برخلاف مد، میانگین کاملا منحصربه‌فرد است یعنی هیچ وقت یک مجموعه دو میانگین ندارد.

۳) شما وقتی مدول میانگین را خوب یاد بگیرید، متوجه روابط دیگری می‌شوید مثلاً

$$\{ \text{مجموع داده‌ها} = N \times \bar{x} \}$$

www.konoon.ir

CamScanner

۴) اگر داده به صورت یکنواخت کم و زیاد نشوند می‌توانیم به جای حساب کردن میانگین از راه معمولی، فقط میانگین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده را محاسبه کنیم.

۵) اگر میانگین داده‌ها را، یکی یکی از آن داده‌ها کم و بعد تک‌تک پاسخ‌ها را با هم جمع کنیم حاصل صفر می‌شود.

۰ = مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین

میانه =

همان طور که از اسمش پیداست، کافی است به دنبال نقطه وسط داده‌ها بگردید. اما روش! اولین کار این است که تمام داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنید. سپس تعداد آن را می‌شماریم. اگر زوج بود یا فرد به هرحال تقسیم بر ۲ می‌کنیم. برای تعداد زوج یک عدد رند درمی‌آید که کافی است میانگین همان عدد و عدد بعدش را محاسبه کنیم و اگر فرد بود عدد حذره خواهد راست که آن را به طرف بالا گرد می‌کنیم و همان عدد میانه خواهد بود.

چهارمین عدد ← ۴ ← ۳٫۵ ← ۷/۲ ← N = ۷ ← ۴, ۵, ۵, ۶, ۶, ۶, ۷

میانه

داده دور افتاده:

داده ای که نسبت به سایر داده ها بسیار کوچک یا بسیار بزرگ باشد. ما وقتی داده دور افتاده داشته باشیم از معیار میانه به جای میانگین استفاده می کنیم.

چون اگر از میانگین استفاده کنیم، به سمت همان داده دور افتاده منحرف خواهد شد.

خاصیت مهم:

در این سه معیاری که تاکنون بررسی کردیم، یک خاصیت مشترک هست که نسبت به هر ۴ عملیات ریاضی منعطف هستند. یعنی هر بلایی بر سر داده ها بیاید، بر سر این ۳ معیار هم خواهد آمد.

www.konoon.ir

CamScanner

فراوانی نسبی : برای بدست آوردن فراوانی نسبی، تعداد داده مدنظر را بر تعداد کل داده ها تقسیم می کنیم.

$$\text{فراوانی نسبی} = \frac{F}{N}$$

درصد فراوانی نسبی : کافی همان F/N را که بدست آوردیم در ۱۰۰ ضرب کنیم.

$$\text{درصد فراوانی نسبی} = F/N \times 100$$

□ گاهی ممکن است به جای فراوانی هر داده به شما بلوند ضریب آن داده.

www.kanoon.ir

CamScanner

تست

۱. میانگین ۱۰ داده آماری ۳۲٫۵ است. اگر دو داده ۳۵ و ۴۰ را از آن‌ها کنار بگذاریم، میانگین ۸ داده حاصل کدام است؟ سراسری ۸۱

۱) ۳۱٫۲۵ ۲) ۳۱٫۵ ۳) ۳۱٫۷۵ ۴) ۳۲

پاسخ: گزینه ۱

همان طور که در درسنامه گفتیم، تعداد × میانگین = مجموع داده‌ها پس:

$$۳۲٫۵ \times ۱۰ = ۳۲۵$$

$$\text{مجموع داده‌های جدید} = ۳۲۵ - ۳۵ - ۴۰ = ۲۵۰$$

$$\text{میانگین جدید} = \frac{۲۵۰}{۸} = ۳۱٫۲۵$$

www.kanoon.ir

CamScanner

۲. اگر میانگین داده های ۱۶، ۱۱، ۱۷، ۱۰، ۹، ۱۰، ۱۳، ۱۷، ۹، ۱۶) برابر ۱۳٫۱ باشد، میانه کدام است؟ سراسری ۹۴

۱) ۱۱٫۵ ۲) ۱۲ ۳) ۱۲٫۵ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینه ۳

$$۱۳٫۱ = \frac{۱۶+۹+۱۷+۱۳+۱۰+a+۱۰+۱۷+۱۱+۱۶}{۱۰}$$

$$۱۳٫۱ = \frac{۱۱۹+a}{۱۰} \Rightarrow ۱۳۱ = ۱۱۹+a \rightarrow a = \boxed{۱۲}$$

$$۹, ۱۰, ۱۰, ۱۱, \underbrace{۱۲, ۱۳}, ۱۶, ۱۶, ۱۷, ۱۷ \rightarrow \frac{۱۲+۱۳}{۲} = ۱۲٫۵$$

www.kanoon.ir

CamScanner

«به نام خدا»

نمودار $\frac{x}{y}$ یک متغیره

مهشید روزه دار

www.kanoon.ir

CamScanner

وقتی صحبت از نمودار های تک متغیره می شود ، باید بدانید که نمودار هایی مثل میله ای (افقی یا عمودی) ، مستطیلی یا هیستوگرام ، دایره ای ، جعبه ای ، خط شکسته ، ... که مقادیر یک متغیر را شامل می شوند در آن جا قرار می گیرند .

ابتدا تعریفی از هرکدام از این نمودار ها داشته باشیم :

۱. میله ای

این نمودار به صورت افقی و عمودی وجود دارد و شامل مقادیر کیفی و کمی هم می شود فقط این را هم بدانید که وقتی نام مقادیر و متغیر هایمان طولانی باشد ، در آن زمان از میله ای افقی استفاده می کنیم .

www.kanoon.ir

CamScanner

۲. مستطیلی (هیستوگرام)

در این نمودار، ارتفاع مستطیل مراوانی دسته‌ها را نشان می‌دهد و برای نمایش متغیرهای کمی استفاده می‌شود.

۳. دایره‌ای

در این نمودار، به تناسب خواسته سوال، درصورتی که زاویه مرکزی را بخواهد از فرمول $\alpha = \frac{f}{N} \times ۳۶۰$ استفاده می‌کنیم و اگر درصد مساحت اشغال شده را بخواهد از فرمول $\%S = \frac{f}{N} \times ۱۰۰$ استفاده می‌کنیم. هم‌چنین این نمودار برای متغیرهای کیفی کاربرد دارد.

www.kanoon.ir

CamScanner

نکته = گاهی در جدول فراوانی ، به جای فراوانی مطلق از فراوانی نسبی استفاده می‌شود که باید بدانید مجموع فراوانی های نسبی ۱ است . اما اگر به درصد بیان شود جمع آنها ۱۰۰ می‌شود .

نکته = گاهی در سوال ها ، درصد را می دهند و زاویه می خواهند یا برعکس . باید بدانید که صرفا با تناسب می توان آن را حل کرد .

۴. نمودار طوقه‌ای

این نمودار دقیقا و بدون همان نمودار دایره‌ای را دارد و فقط در ظاهر شکل سه بعدی پیدا کرده است .

www.kanoon.ir

۵. نمودار خط شکسته

این نمودار در نمایش متغیرهای کیفی و کمی کاربرد دارد. از لحاظ شکل ظاهری هم دارای چند نقطه است که به طور متوالی با پاره خط‌هایی به هم وصل شده اند.

۶. نمودار نقطه ای

برای نمایش متغیرهای کمی با مقادیر صحیح و یا متغیرهای کیفی کاربرد دارد.

۷. نمودار جعبه ای

نوعی نمودار تصویری است. شامل ۵ عدد اصلی می شود { min , max , Q_1 , Q_2 , Q_3 }

به این نکته توجه کنید که Q_2 لزوماً وسط جعبه قرار نمی گیرد. اما هرچه به سمت راست نزدیک تر شود به این معنی است که پراکندگی در سمت چپ بیشتر است و همین طور بالعکس.

نکته = min + طول کل نمودار = max

نکته = گاهی اوقات در برخی سوالات باید مسخص کنیم در هر سمتی چند داده قرار دارد.
ابتدا تعداد کل را بر ۴ تقسیم می کنیم. اگر اعشاری شد، قسمت اعشار را حذف می کنیم.
عدد حاصل تعداد داده های دنبالر سمت چپ و راست را مسخص می کند. سپس میانگین هر
قسمت را در تعدادش ضرب می کنید تا مجموع داده ها بدست آید و در آخر میانگین کل داده ها را
حساب می کنید.

www.kanoon.ir

CamScanner

به نام خدا

نمودار ع‌ی چند متغیره

مهسا سیدروزه‌دار

www-kanoon-ir

CamScanner

در درسنامه قبلی در مورد نمودارهای تک متغیره صحبت کردیم. اما این جا نمودارهایی را بررسی می‌کنیم که به طور همزمان دو یا چند متغیر را نمایش می‌دهند.

۱. نمودارهای پراکنش نما است

این نوع نمودار، دو متغیره است و دارای تعدادی نقطه است که به صورت $B(x,y)$ نمایش داده می‌شود. x روی محور افقی و y روی محور عمودی نمایش داده می‌شود.

www.kanoon.ir

۲. نمودار حبابی

این نمودار برای نمایش متغیرهای بیش از ۳ یا ۴ تا استفاده می‌شود. در این حا علاوه بر نقاطی که در پراکنش نمایش دادیم، مساحت دایره ها را هم داریم. که تحت عنوان متغیر سوم شناخته می‌شود. یعنی (x و y و z)

نکته مهم = متغیر سوم برحسب مساحت یا مجذور شعاع است یا فقط خود شعاع!

بنابر نکته بالا اگر مساحت ۲ برابر شود شعاع هم ۲ برابر نخواهد شد. به این رابطه دقت کنید. چون مساحت دایره (πr^2) است.

www.kanoon.ir

CamScanner

۳. نمودار راداری (تار عنکبوتی)

این نمودار برای ۳ متغیر یا بیشتر استفاده می‌گردد. و صرفا برای متغیر ع ی کمی کاربرد دارد.

برای درست آوردن زاویه بین دو شعاع متوالی در نمودار راداری از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{زاویه } \alpha = \frac{۳۶۰}{\text{تعداد متغیر ع}}$$

کاربرد = برای مقایسه عملکرد افراد در زمینه ع ی مختلف.

نکته = اعداد روی محور، مقادیر حقیقی نیستند.

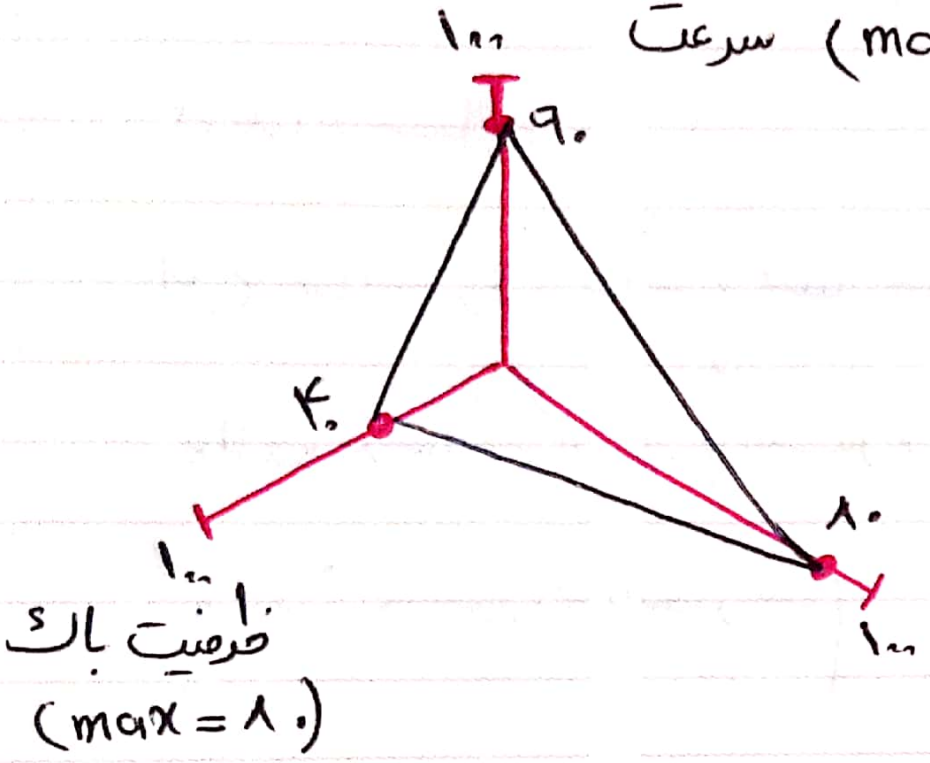
یک مرحله خیلی مهم هم در این بخش وجود داره:

$$\text{مقدار واقعی} = \frac{\text{مقدار مدنظر}}{\max} \times ۱۰۰$$

www.kanoon.ir

CamScanner

مثال =



اگر در مثال بالا مقدار واقعی سرعت را خواهند از رابطه زیر استفاده می کنیم.

$$\frac{\text{سرعت مدنظر}}{\text{max}} \times 100 \rightarrow \frac{x}{200} \times 100 = 90 \rightarrow x = 180 \text{ km/h}$$