درسنامه آموزش ریاضی

ریاضی پایه نهم

استاد:

صادق علی‌پور

فهرست کل

ریاضی

پایه نهم

۱

مجموعه‌ها

۱ معرفی مجموعه

معرفی یک مفهوم بسیار مهم و دارای کاربردهای فراوان:

مجموعه:
هرگاه تعدادی شیء یا عدد را کنار هم در نظر بگیریم، یک «**مجموعه**» ساخته می‌شود. مجموعه‌ها را با حروف بزرگ A، B، C و ... نام‌گذاری می‌کنیم.

برای نمونه:
مجموعه‌ی شمارنده‌های مثبت عدد ۱۸ را می‌توان به صورت $A=\{۱,۲,۳,۶,۹,۱۸\}$ نمایش داد. همچنین، $B=\{۲,۳\}$ مجموعه شمارنده‌های اول و $C=\{۶,۹,۱۸\}$ مجموعه شمارنده‌های مرکب عدد ۱۸ هستند.

می‌توان گفت: هر مجموعه گروهی از عددها یا اشیاء است.

بعلاوه:

- به اعداد یا اشیاء داخل مجموعه «**عضو**» گوئیم. برای نمونه؛ عدد ۳ عضو مجموعه‌ی A بوده و عدد ۴ عضو آن نیست؛ پس می‌نویسیم:

$$۳\in A \quad \text{و} \quad ۴\notin A$$

- مانند بالا، برای نمایش ساده‌ی یک مجموعه، اعضای آن را بین دو آکولاد «{» و «}» نوشته و بین آن‌ها ویرگول انگلیسی « , » قرار می‌دهیم.

مثال: به نمونه‌های زیر توجه کنید:

الف) مجموعه‌ی عددهای صحیح بین ۴- و ۳ برابر است با: $B=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

ب) مجموعه‌ی اعداد طبیعی:

$$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,\dots\}$$

توجه کنید:
$\mathbb{N}$ نماد استاندارد و جهانی برای مجموعه‌ی عددهای طبیعی است.

مثال: A را مجموعه‌ی اعداد اول بزرگ‌تر از ۱۱ و کمتر از ۲۵ بگیرید.

الف) این مجموعه را با نوشتن عضوها نمایش دهید.

ب) کدام مورد درست و کدام نادرست است؟

$$۲۴\in A \quad \text{و} \quad ۱۱\in A \quad \text{و} \quad ۲۱\notin A \quad \text{و} \quad -\frac{۱۵}{۳}\in \mathbb{Z}$$

پاسخ

الف) تمام عددهای اول بین ۱۱ و ۲۵ در مجموعه می‌آیند:

$$A=\{۱۳,۱۷,۱۹,۲۳\}$$

ب) از سمت راست، $۲۱ \notin A$ درست بوده و دو مورد دیگر نادرست هستند. چون $-\frac{۱۵}{۳}=-۵$، مورد آخر صحیح است.

مثال: (مشابه کتاب) سه عبارت بنویسید که دوتای آن‌ها مشخص کننده‌ی مجموعه‌ای فقط با یک عضو و سومی مشخص کننده‌ی مجموعه‌ای با دو عضو باشد.

پاسخ

الف) «مجموعه عددهایی مثبت که هر عددی بر آن‌ها بخش‌پذیر باشد» برابر است با: $\{۱\}$

ب) «مجموعه عددهای اول زوج» برابر است با: $\{۲\}$

پ) «مجموعه عددهای اول فرد کمتر از ۶» برابر است با: $\{۳,۵\}$

شرط تشکیل:

برای آن‌که یک بیان در مورد تعدادی شیء یا عدد تشکیل مجموعه دهد، لازم است:

اعداد یا اشیاء ذکر شده دقیقاً «**مشخص**» یا «**معین**» باشند.

یعنی:

برای هر شیء یا عددِ دلخواهی، دقیقاً معلوم باشد که آیا در مجموعه هست یا خیر.

به عبارت دیگر، لازم است:

تعیین اعضای مجموعه به نظر و سلیقه‌ی افراد بستگی نداشته باشد.

چند نمونه:

الف) عبارت: «**اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۶**» یک مجموعه معرفی می‌کند؛ زیرا:

دقیقاً عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ شرط داده شده را داشته و اعضای مجموعه هستند.

ب) عبارت «**پنج عدد طبیعی**» یک مجموعه معرفی نمی‌کند؛ زیرا:

دقیقاً معلوم نیست کدام عددهای طبیعی جزء این پنج‌تا بوده و کدام‌ها جزء آن‌ها قرار ندارند.

مثال: کدام جملات زیر یک مجموعه مشخص می‌کند؟

الف) سخت‌ترین کتاب درسی در پایه نهم.

ب) سه نفر اول رتبه‌بندی کنکور سال ۱۴۰۳ رشته‌ی تجربی.

پاسخ

الف) سخت بودن درس به نظر و سلیقه‌ی افراد بستگی دارد، پس این جمله مجموعه مشخص نمی‌کند.

ب) این جمله یک مجموعه مشخص می‌کند، زیرا نفرات اول تا سوم کنکور هر سال افراد مشخصی هستند که بعد از آزمون دقیقاً معلوم شده و به جامعه معرفی می‌شوند.

---✿---

استان یزد- خرداد ۱۴۰۰

عبارت «دو عدد اول کوچک‌تر از ۶» مشخص کننده‌ی یک مجموعه است. (درست ☐ نادرست ☐)

پاسخ

نادرست است؛

زیرا سه عدد اول ۲ و ۳ و ۵ وجود داشته و مشخص نیست کدام دو عدد باید در مجموعه باشند.

---✿---

پای تخته

۱. مشخص کنید کدام موارد یک مجموعه مشخص می‌کنند؟ (از کتاب)

الف) سه عدد زوج متوالی با شروع از ۲   ب) سه شهر ایران

پ) پنج عدد بزرگ   ت) شمارنده‌های عدد ۲۴   ث) چهار عدد فرد متوالی

توجه کنید: (مهم)

دو مطلب قابل توجه دیگر در مورد مجموعه‌ها:

- اعضای یک مجموعه را متمایز در نظر می‌گیریم؛ یعنی:

اگر در مجموعه عضو تکراری نوشته شده باشد، آن را فقط یک‌بار شمرده و تکرار را حذف می‌کنیم.

برای نمونه:

مجموعه‌ی $B=\{۳,۵,۳\}$ دارای دو عضو است و نمایش اصلاح شده‌ی آن $B=\{۳,۵\}$ می‌باشد.

- ترتیبِ نوشتن اعضای مجموعه اهمیتی ندارد.

برای نمونه:

عبارت‌های $\{a,b,c\}$ و $\{c,a,b\}$ تفاوتی نداشته و هر دو یک مجموعه را معرفی می‌کنند.

مجموعه تُهی:

مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعه‌ی **«تهی»** نام داشته و آن را با $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نشان می‌دهیم.

برای نمونه:

چون اعداد طبیعی همگی مثبت هستند؛ «مجموعه‌ی اعداد طبیعیِ کوچک‌تر از صفر» به صورت تهی $\{\ \}$ است.

توجه کنید:

مجموعه‌ی $\{\varnothing\}$ دارای یک عضو بوده و با $\varnothing$ یکی نیست.

مثال: کدام بیان معرف مجموعه‌ی تهی است؟

الف) اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲. ب) اعداد صحیح کوچک‌تر از صفر. پ) اعداد اول کوچک‌تر از ۲.

پاسخ

الف) این مجموعه یک عضو دارد و تهی نیست: $\{۱\}$.

ب) بی‌شمار عدد صحیح کمتر از صفر داریم:

$$\{-۱,-۲,-۳,-۴,\cdots\}\neq\varnothing$$

پ) می‌دانید که کوچک‌ترین عدد اول ۲ است و بنابراین در این قسمت جواب $\varnothing$ خواهد شد.

روش مفیدی برای نمایش مجموعه‌ها معرفی می‌کنیم.

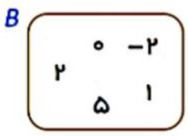
نمودار وِن:

در این روش، مجموعه‌ها را با استفاده از شکل‌های هندسی نمایش می‌دهیم؛ به این صورت که:

- یک شکل هندسی مثلاً چند ضلعی یا دایره رسم می‌کنیم.
- اعضای مجموعه را داخل آن می‌نویسیم.

برای نمونه؛

نمودار ون مجموعه‌ی $B=\{-۲,۰,۱,۲,۵\}$ به صورت مقابل است:



مثال: هر مورد در زیر که یک مجموعه مشخص می‌کند را با نمودار ون نشان دهید.

الف) هشت عدد طبیعی یک رقمی. ب) چهار عدد طبیعی بین ۵ و ۱۰.

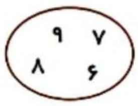
پ) حروف صدا دار زبان انگلیسی.

پاسخ

الف) چون تعداد ۹ عدد طبیعی یک رقمی وجود دارد، عضوها مشخص نبوده و مجموعه تشکیل نمی‌شود.

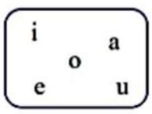
ب) فقط چهار عدد طبیعی بین ۵ و ۱۰ وجود دارد و در نتیجه جمله‌ی بیان شده مجموعه است:

$\{۶,۷,۸,۹\}$



پ) این حروف پنج مورد و کاملاً مشخص هستند:

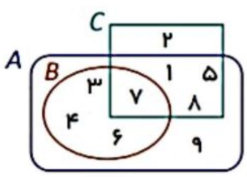
$\{a,e,i,o,u\}$



مثال: مجموعه‌های $A=\{۱,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$، $B=\{۳,۴,۶,۷\}$ و $C=\{۱,۲,۵,۷,۸\}$ را با نمودار ون نمایش دهید.

پاسخ

به آسانی می‌توان نمودار را رسم کرد:



---✤---

پاسخ دهید (۱)

۱- کدام جمله‌ی زیر یک مجموعه مشخص می‌کند؟

الف) کارکنان دارای تحصیلات دانشگاهی در شرکت سامسونگ

ب) کارکنان دارای خلاقیت در شرکت سامسونگ

۲- هر کدام از موارد زیر یک مجموعه مشخص می‌کند را با نمودار ون نمایش دهید.

الف) شمارنده‌های اول عدد ۱۳.

ب) شمارنده‌های اول عدد ۱.

پ) جواب‌های معادله‌ی $-۲x+۷=۱$.

ت) سه عددی که در پرتاب یک تاس نمایان می‌شود.

۳- سه مجموعه‌ی متفاوت بنویسید که عدد ۵ عضو آن‌ها باشد.

منتخب کتاب:

۱- متناظر با هر عبارت یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه، یک عبارت نوشته و تعداد اعضای هر مجموعه را تعیین کنید:

الف) $A=\{۱,۸,۲۷,۶۴,۱۲۵\}$

ب) $C=\{۱۰\}$

پ) عددهای طبیعی مضرب ۵ و کوچک‌تر از ۱۰۰

ت) عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۴ و کوچک‌تر از ۵

ث) عددهای صحیح منفی که بین ۴ و ۷ قرار دارد.

ج) عددهای اول دو رقمی که مضرب ۷ باشد.

۲- جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل درست باشد.

الف) عبارت «پنج عدد طبیعی که بین ۱ و ۲۰ قرار داشته باشد»، یک مجموعه را مشخص ....

ب) مجموعه $\{۲,۳,۴,...,۹\}$ دارای .... عضو است.

پ) مجموعه $A=\{۰,\varnothing\}$ دارای .... عضو است.

ت) با توجه به مجموعه‌ی $A=\{۳,۵,۷,۹,۱۱\}$، داریم: ۵ عضو A است، یا با نماد ریاضی ....

چالش (ویژه علاقمندان)

CHALLENGE

۱- مجموعه‌ی عددهای صحیح بین دو عدد $\sqrt{۱۳}-۱۳$ و $-۱۷+\sqrt{۱۷}$ را بنویسید.

۲- اگر $x\in \mathbb{Z}$ و $-x\in A$ درست باشد، آنگاه مجموعه‌ی A کدام یک از موارد زیر نمی‌تواند باشد؟

☐ $\mathbb{Z}$ ☐ $\mathbb{Q}$ ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $\mathbb{N}$

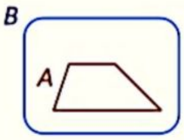
۲ زیر مجموعه

در این بخش، مفاهیمی مهم در ارتباط با دو مجموعه بیان و بررسی می‌شود.

زیر مجموعه:

دو مجموعه‌ی A و B را در نظر بگیرید. هرگاه هر عضو از مجموعه‌ی A در B هم قرار داشته باشد، یعنی:

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$



در این صورت گوئیم A «زیر مجموعه» B است و می‌نویسیم:

$A \subseteq B$ یا $A \subset B$

(نمادهای $\subseteq$ و $\subset$ یک معنی دارند.)

توجه کلید:

اگر شرط بالا برقرار نباشد، A زیر مجموعه‌ی B نیست و می‌نویسیم: $A \nsubseteq B$.

به نمونه‌های بعدی توجه کنید:

مثال: با توجه به مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$، پاسخ دهید:

الف) زیر مجموعه‌ای از A بنویسید که اعضای آن عدد اول باشند.

ب) زیر مجموعه‌ای از A بنویسید که اعضای آن مضرب ۲ باشند.

پ) زیر مجموعه‌ای از A بنویسید که اعضای آن مجذور کامل باشند.

پاسخ

الف) عددهای اول که در A هستند را می‌نویسیم: $B = \{۲,۳,۵,۷\}$

ب) مشابه قسمت قبل، عددهای مضرب ۲ در A نوشته می‌شوند: $C = \{۲,۴,۶,۸\}$

پ) واضح است که:

$$D = \{۱,۴,۹\}$$

مثال: کدام مورد درست و کدام مورد نادرست است؟

$W \subseteq \mathbb{N}$　　$W \subseteq \mathbb{Z}$

پاسخ

عبارت $W \subseteq \mathbb{N}$ نادرست است، زیرا عدد صفر در W هست ولی در $\mathbb{N}$ قرار ندارد؛ ولی $W \subseteq \mathbb{Z}$ درست است.

آذربایجان شرقی - خرداد ۱۴۰۲

کدام مورد از موارد زیر درست است؟

☐ $۰ \in \mathbb{N}$ ☐ $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z}$ ☐ $\sqrt{۱۵} \in \mathbb{Q}$ ☐ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

پاسخ

واضح است که هر عدد طبیعی، صحیح هم هست و بنابراین: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. (مورد چهارم)

---✿---

مثال: فرض کنید $A \not\subseteq B$ و عدد ۲ عضو مجموعه‌ی A باشد. آیا عبارت $۲ \notin B$ صحیح است؟ چرا؟

پاسخ

خیر، زیرا ممکن است عدد ۲ عضو مجموعه‌ی B باشد، ولی برخی دیگر از عضوهای A در مجموعه‌ی B قرار نداشته باشند.

---✿---

در ادامه‌ی استدلال مثال قبل:

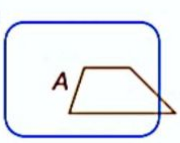
توجه کنید: (مهم)

اگر بدانیم $A \not\subseteq B$، در این صورت به مطلب مهم زیر می‌توان اشاره کرد:

ممکن است بسیاری از اعضای A در مجموعه‌ی B هم باشند؛ اما:

لااقل یک عضو در A هست که در B قرار ندارد.

شکل مقابل را ببینید:



نمونه‌ای دیگر:

برای مجموعه‌های $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ و $B = \{۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$، چون $۱ \in A$ است، ولی $۱ \notin B$.

در نتیجه:

در این نمونه، عبارت $A \not\subseteq B$ صحیح است. (ولی سایر عضوهای A در B نیز هستند.)

نتیجه:

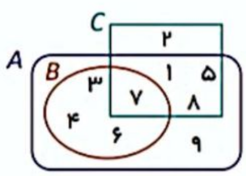
برای هر مجموعه‌ی دلخواه A؛

رابطه‌ی $\varnothing \subseteq A$ همیشه درست است.

زیرا:

اگر $\varnothing \not\subseteq A$ باشد، باید یک عضو در $\varnothing$ یافت شود که عضو A نباشد؛ ولی می‌دانیم $\varnothing$ عضوی ندارد.

مثال: سه مجموعه‌ی A، B و C را در نمودار ون روبه‌رو ببینید:



دو مورد زیر را بررسی و کنترل کنید.

الف) موارد زیر همگی درست هستند:

$\{۲,۷\} \subseteq C$ و $\{۳,۷\} \not\subseteq C$ و $C \not\subseteq A$ و $B \subseteq A$

ب) موارد زیر همگی نادرست هستند:

$\{۲,۷\} \subseteq A$ و $\{۴,۷\} \not\subseteq B$ و $C \subseteq A$ و $\{۱\} \in A$

---✿---

✿ **مثال:** تمام زیر مجموعه‌های $A=\{۲,a\}$ را بنویسید.

پاسخ

همه‌ی مجموعه‌های ممکن را می‌نویسیم:

$$\{\ \} \qquad \{۲\} \qquad \{a\} \qquad \{۲,a\}$$

پس مجموعه‌ی داده شده ۴ زیرمجموعه دارد.

---✿---

توجه کنید:

چنان‌که در بالا هم می‌بینید، رابطه‌ی $A\subseteq A$ برای هر مجموعه‌ی A درست است. (همیشه $\varnothing$ کوچک‌ترین و خودِ مجموعه، بزرگ‌ترین زیرمجموعه محسوب می‌شود.)

گاهی برخی از اعضای یک مجموعه، خودشان نیز مجموعه هستند.

پای تخته

۲. تمام زیر مجموعه‌های دو مجموعه‌ی (A: مجموعه جواب‌های صحیح معادله $-۳x-۵=-۲$) و $B=\{۱,۲,\{۳\}\}$ را بنویسید.

در ادامه، مفهومی دیگر در ارتباط با دو مجموعه معرفی می‌شود:

مجموعه‌های برابر:

هرگاه اعضای دو مجموعه‌ی A و B کاملاً یکسان باشند، یعنی:

$$x\in A \Leftrightarrow x\in B$$

در این صورت، دو مجموعه را «**برابر**» یا «**مساوی**» گفته و می‌نویسیم:

$$A=B$$

توجه کنید:

مجموعه‌های A و B هنگامی برابرند که عبارت‌های $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ هر دو درست باشند.

نتیجه:

عبارت $A \neq B$ به این معنی است که: «لااقل یک عضو در یکی از دو مجموعه هست که در دیگری قرار ندارد.»

مثال: در جاهای خالی عددهای مناسب قرار دهید تا تساوی درست شود.

$$\{-۳, \frac{۱}{۵}, \ldots, \frac{۱۲}{۴}\} = \{\sqrt{۹}, -\frac{۹}{\ldots}, ۰/۲, -\frac{-(-۳)^۳}{-\sqrt{۱۶}}\}$$

پاسخ

چون عدد -۳ در مجموعه‌ی سمت چپ هست، باید در سمت راست هم باشد:

جای خالی سمت راست عدد ۳ است. $\quad -\frac{۹}{۳} = -۳$

در مجموعه‌ی سمت راست عدد $\frac{۲۷}{۴} = -\frac{۲۷}{-۴} = -\frac{-(-۳)^۳}{-\sqrt{۱۶}}$ وجود دارد و در نتیجه جای خالی سمت چپ باید $\frac{۲۷}{۴}$ باشد.

توجه کنید:

بقیه‌ی عضوها در دو مجموعه مشترک هستند.

استان گیلان - خرداد ۱۴۰۰

مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که دو مجموعه‌ی $\{y+۳, ۵\}$ و $\{x-۱, ۷\}$ برابر باشند.

پاسخ

واضح است که باید داشته باشیم:

$$x-۱=۵ \Rightarrow x=۵+۱=۶ \quad و \quad y+۳=۷ \Rightarrow y=۷-۳=۴$$

مثال: اگر $A=\{x+y, ۲, ۱\}$ و $B=\{۲, ۲x, ۳\}$ دو مجموعه‌ی برابر باشند، مقادیر x و y را به‌دست آورید.

پاسخ

باید عضوهای A و B یکسان باشند. با توجه به این‌که عدد ۲ در هر دو مجموعه مشترک است، دو عضو دیگر را با هم برابر قرار داده و معادله‌های به‌دست آمده را حل می‌کنیم:

$$۲x=۱ \rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

$$x+y=۳ \xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۲}+y=۳ \rightarrow y=\frac{۵}{۲}$$

نمایش نمادین:

روشی مهم برای نمایش مجموعه‌ها، به زبان (نماد) ریاضی است. مجموعه‌ی اعداد طبیعی را در نظر بگیرید:

$$\mathbb{N}=\{۱, ۲, ۳, ۴, \ldots\}$$

می‌خواهیم دو زیرمجموعه‌ی پرکاربرد آن:

اعداد طبیعی زوج $E=\{2,4,6,\dots\}$ و **اعداد طبیعی فرد** $O=\{1,3,5,\dots\}$

را به صورت نمادین بنویسیم. چون هر عدد زوج مضرب ۲ است، می‌توان عضوهای E را به صورت زیر نوشت:

$$2,4,6,\dots \quad \Rightarrow \quad 2\times1\ ,\ 2\times2\ ,\ 2\times3\ ,\ \dots$$

می‌بینید که الگوی عضوهای E به صورت $2\times k$ بوده که در آن $k=1,2,3,4,\dots$ عددی طبیعی است. به عبارت دیگر مجموعه‌ی E را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$E=\{2k \mid \text{عددی طبیعی } k\}=\{2k \mid k\in\mathbb{N}\}$$

(**خوانده می‌شود:** E برابر است با مجموعه همه عضوهای به صورت $2k$، به شرطی که k عددی طبیعی باشد.)

به‌طور کاملاً مشابه:

اعداد طبیعی فرد $1,3,5,\dots$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$2\times1-1\ ,\ 2\times2-1\ ,\ 2\times3-1\ ,\ \dots \quad \Rightarrow \quad O=\{2k-1 \mid \text{عددی طبیعی } k\}=\{2k-1 \mid k\in\mathbb{N}\}$$

مثال: مجموعه‌ی اعداد حسابی را با نماد ریاضی بنویسید.

پاسخ

اعضای مجموعه‌ی $W=\{0,1,2,3,\dots\}$ از اعداد طبیعی ۱ واحد کوچک‌تر هستند:

$$0,1,2,3,4,\dots \quad \Rightarrow \quad \underbrace{1-1}_{=0}\ ,\ \underbrace{2-1}_{=1}\ ,\ \underbrace{3-1}_{=2}\ ,\ \underbrace{4-1}_{=3}\ ,\ \underbrace{5-1}_{=4}\ ,\ \dots$$

پس هر عدد در W به صورت $k-1$ است که در آن k عددی طبیعی است. در نتیجه می‌نویسیم:

$$W=\{k-1 \mid k\in\mathbb{N}\}$$

---✤---

پای تخته!

۳. مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی بنویسید.

الف) $\{0,1,4,9,16,\dots\}$ ب) $\{0,3,8,15,24,\dots\}$

معمولاً روند برعکس بالا را نیاز داریم:

مثال: (از کتاب) مجموعه‌ی $A=\{5n+3 \mid n\in\mathbb{N}\}$ را با عضوهایش مشخص کنید.

پاسخ

کافی است عددهای طبیعی را در الگوی $۵n+۳$ جایگزین سازیم:

$n=۱ \rightarrow ۵(۱)+۳=۸$ $\quad n=۲ \rightarrow ۵(۲)+۳=۱۳$ $\quad n=۳ \rightarrow ۵(۳)+۳=۱۸$

$n=۴ \rightarrow ۵(۴)+۳=۲۳$ $\quad n=۵ \rightarrow ۵(۵)+۳=۲۸$ $\quad \dots$

این روند تا بی‌نهایت ادامه دارد و مجموعه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A=\{۸,۱۳,۱۸,۲۳,۲۸,\dots\}$$

مثال: هر یک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضاء مشخص کنید.

الف) $A=\{۹x \mid x\in \mathbb{Z}\ ,\ -۲<x\leq ۲\}$

ب) $B=\{x^۲-۱ \mid x\in W\}$

پ) $C=\{\frac{x^۲}{۷x-۱} \mid x\in \mathbb{N}\ ,\ -۲<x\leq ۵\}$

پاسخ

الف) باید عددهای صحیح از -۱ تا ۲ را جای x قرار می‌دهیم:

$$۹\times(-۱)\ ,\ ۹\times(۰)\ ,\ ۹\times۱\ ,\ ۹\times۲ \Rightarrow A=\{-۹,۰,۹,۱۸\}$$

ب) مشابه قسمت قبل، عددهای W را از ابتدا در عبارت $x^۲-۱$ به جای x قرار می‌دهیم:

$$(۰)^۲-۱\ ,\ (۱)^۲-۱\ ,\ (۲)^۲-۱\ ,\ (۳)^۲-۱\ ,\ \dots \Rightarrow B=\{-۱,۰,۳,۸,\dots\}$$

توجه کنید که عددهای W بی پایان هستند و بنابراین مجموعه‌ی B هم پایان ندارد.

پ) فقط عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را جای x قرار می‌دهیم:

$$\frac{(۱)^۲}{۷(۱)-۱},\frac{(۲)^۲}{۷(۲)-۱},\frac{(۳)^۲}{۷(۳)-۱},\frac{(۴)^۲}{۷(۴)-۱},\frac{(۵)^۲}{۷(۵)-۱} \Rightarrow C=\{\frac{۱}{۶},\frac{۴}{۱۳},\frac{۹}{۲۰},\frac{۱۶}{۲۷},\frac{۲۵}{۳۴}\}$$

پای تخته

۴. مجموعه‌ی مقابل را با نوشتن اعضاء مشخص نمایید: $A=\{x^۲ :\ x\in \mathbb{Z}\ ,\ -۲\leq x<۱\}$

پاسخ دهید (۲)

۱- تمام زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید:

- $\{a,b,\{c\}\}$
- $\{۱,۲,\{۱,۲\}\}$

۲- در هر یک از موارد زیر، مجموعه‌های A و B برابرند. مجهولات موجود در مجموعه‌ها را تعیین کنید:

- $A=\{m+۲n,۵,۳\}$ و $B=\{۱-۲n,۵,-۳\}$.
- $A=\{x-۱,۵\}$ و $B=\{۴,y+۳\}$.

۳- در تساوی $\{۵-۲x,۳x-۲۵\}=\{m\}$، مقدار m را بیابید.

۴- از تساوی زیر مقدیر x و y را بیابید:

$$\{\{x\},۷,۴-y\}=\{x-y,\{۳\},۸\}$$

۵- مجموعه‌های زیر را با استفاده از نمادهای ریاضی بنویسید:

- $A=$ مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد بین ۶ و ۲۱
- $B=\{۲,۶,۱۰,۱۴,۱۸\}$
- $D=\{۴,۹,۱۶,۲۵,\dots\}$

۶- اعضای هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید:

- $A=\{۳k-۱:\ k\in \mathbb{N}\ ,-۳\le k<۵\}$
- $B=\{\dfrac{x^۲}{۱+x^۲}\mid\ x\in \mathbb{Z}\ ,-۴\le x<۲\}$

۷- مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۸ را به دو صورت زیر بنویسید:

- با نوشتن اعضاء
- با استفاده از نمادهای ریاضی

۸- کدام مورد درست و کدام مورد نادرست است؟

- $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$
- $\varnothing\subset\{۱\}$
- اگر $A\subset\varnothing$ باشد، آنگاه A برابر تهی است.
- اگر $A\not\subset B$ و $a\in A$ باشد، آنگاه $a\notin B$.

۹- مجموعه‌های W، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Q}$ را در یک نمودار ون به صورت صحیح نمایش دهید.

منتخب کتاب:

۱- مجموعه‌ی $A=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$ را در نظر بگیرید. کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

$B=\{x|\ x\in A,\ x^۲\le ۲\}$, $C=\{x|\ x\in A,\ -۱\le x\le ۱\}$, $D=\{x|\ x\in A,\ x^۴\le ۱\}$

۲- سه مجموعه مانند A، B و C بنویسید به طوری که $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$. آیا می‌توان نتیجه گرفت: $A\subseteq C$؟

۳- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید:

الف) هر عدد گویا، عددی حسابی است.

ب) هر عدد حسابی، عددی گویا است.

پ) هر عدد صحیح، عدد گویا است.

ت) بعضی از اعداد گویا، عدد صحیح هستند.

CHALLENGE

چالش (ویژه علاقمندان)

الف) مجموعه‌ی $A=\{\{1,2,3,\dots\}\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

ب) مجموعه‌ی $A=\{2^{x-3y} \mid x-1=3y\}$ را با نوشتن عضوهایش به صورت ساده نمایش دهید.

۳ جبر مجموعه‌ها

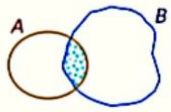
در این بخش، با روش‌هایی برای ساخت مجموعه‌هایی جدید آشنا می‌شویم. اولین روش:

اشتراک:

برای دو مجموعه‌ی A و B، «**اشتراک**» آن‌ها:

مجموعه‌ی تمام اعضایی است که هم در A و هم در B قرار داشته باشند.

این مجموعه را به صورت $A\bigcap B$ نشان می‌دهیم. بنابراین با نماد ریاضی می‌توان نوشت:



$$A\bigcap B=\{x \mid x\in A \,,\, x\in B\}$$

مثال: اگر $A=\{-۱,۲,۰,۴\}$ و $B=\{۰,۲,۴\}$ و $C=\{۳,-۱,۶\}$، مجموعه‌های $A\bigcap B$، $B\bigcap C$ و $A\bigcap C$ را مشخص کنید.

پاسخ

عضوهای مشترک مجموعه‌ها را در هر حالت می‌نویسیم:

$$A\bigcap B=\{-۱,۲,۰,۴\}\bigcap\{۰,۲,۴\}=\{۰,۲,۴\}$$

به‌طور مشابه:

$$B\bigcap C=\{۰,۲,۴\}\bigcap\{۳,-۱,۶\}=\varnothing \quad و \quad A\bigcap C=\{-۱,۲,۰,۴\}\bigcap\{۳,-۱,۶\}=\{-۱\}$$

شهرستان‌های استان تهران - خرداد ۱۴۰۲

اگر $A=\{x+۱ \mid x\in \mathbb{N}\,,\, x\le ۳\}$ و $B=\{۲,۳,۵,۷\}$ باشد، مجموعه‌ی $A\bigcap B$ را با اعضاء مشخص کنید.

پاسخ

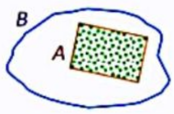
به آسانی $A=\{۲,۳,۴\}$ نوشته می‌شود و در نتیجه:

$$A\bigcap B=\{۲,۳\}$$

خواص اشتراک:

در مورد مجموعه‌های A و B به موارد ساده‌ی زیر می‌توان اشاره کرد:

- اشتراک هر مجموعه با خودش، برابر همان مجموعه است: $A\bigcap A=A$
- واضح است که تهی با هیچ مجموعه‌ای عضو مشترک ندارد: $A\bigcap\varnothing=\varnothing$
- اگر $A\subseteq B$ باشد، اشتراک آن‌ها برابر **مجموعه‌ی کوچک‌تر** یعنی A است:



$$A\subseteq B \Rightarrow A\bigcap B=A$$

(**نمونه:** در مثال قبل $B\subseteq A$ بوده و در نتیجه $A\bigcap B=B$ شده است.)

حالت ویژه:

ممکن است دو مجموعه عضو مشترک نداشته باشند که در این صورت آن‌ها را **«جدا از هم»** یا **«مجزا»** گویند:

$A \cap B = \varnothing$

برای نمونه:

مجموعه‌های اعداد طبیعی فرد O و اعداد طبیعی زوج E، مجزا هستند:

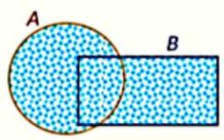
$$O \cap E = \varnothing$$

عمل دیگر بین دو مجموعه به صورت زیر بیان می‌شود:

اجتماع:

برای دو مجموعه‌ی A و B، اجتماعشان را با $A \cup B$ نشان داده و آن:

شامل تمام اعضایی است که لااقل در یکی از A یا B قرار داشته باشند.



بنابراین با نماد ریاضی می‌توان نوشت:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

توجه کنید:

مجموعه‌ی $A \cup B$ از کنار هم قرار دادن اعضای دو مجموعه به‌دست می‌آید و البته:

در اجتماع، اعضای تکراری فقط یک بار نوشته می‌شوند.

مثال: اگر $A = \{-۱,۲,۰,۴\}$ و $B = \{۰,۲,۴\}$ و $C = \{۳,-۱,۶\}$، مجموعه‌های $A \cup B$ و $B \cup (A \cap C)$ را مشخص کنید.

پاسخ

عضوهای مجموعه‌ها را در هر حالت کنار هم می‌نویسیم:

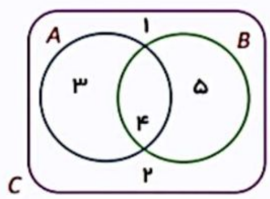
$$A \cup B = \{-۱,۲,۰,۴\} \cup \{۰,۲,۴\} = \{-۱,۲,۰,۴\}$$

به‌طور مشابه، چون $A \cap C = \{-۱\}$ است:

$$B \cup (A \cap C) = \{۰,۲,۴\} \cup \{-۱\} = \{-۱,۰,۲,۴\}$$

---✿---

مثال: (از کتاب) با توجه به نمودار روبرو، کدام درست و کدام نادرست است؟



الف) $A \subseteq C$		ب) $C \subseteq (A \cup B)$		پ) $(A \cup B) \subseteq C$

ت) $۴ \notin (A \cap B)$		ث) $۴ \in (A \cup B)$

پاسخ

الف) درست است. **ب)** نادرست است؛ چون $1 \in C$ است، ولی ۱ در $A \cup B$ قرار ندارد.

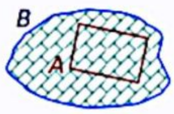
پ) درست است. **ت)** نادرست است. **ث)** درست است.

---✲---

خواص اجتماع:

در مورد اجتماع مجموعه‌ها به موارد زیر می‌توان اشاره کرد:

- اجتماع هر مجموعه با خودش، برابر همان مجموعه است: $A \cup A = A$
- واضح است که اجتماع تهی با هر مجموعه‌ای روی آن مجموعه بی اثر است: $A \cup \varnothing = A$
- اگر $A \subseteq B$ باشد، اجتماع آن‌ها برابر **مجموعه‌ی بزرگ‌تر** یعنی B است:



$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$

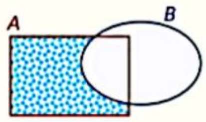
(**نمونه:** در دو مثال قبل‌تر، $B \subseteq A$ بوده و بنابراین $A \cup B = A$ شده است.)

مفهوم بعدی، اختلاف اعضای یک مجموعه با مجموعه‌ای دیگر را نشان می‌دهد:

تفاضل:

تفاضلِ مجموعه‌ی B از A را با $A - B$ نشان داده و آن:

شامل تمام عضوهایی است که در A هستند، ولی در B قرار ندارند.

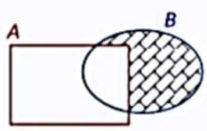


با نماد ریاضی می‌توان نوشت:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

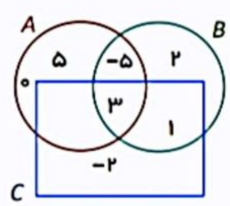
به صورت مشابه:

مجموعه‌ی $B - A$ نیز شامل اعضایی است که در B بوده ولی در A نیستند.



استان قم- خرداد ۱۴۰۲

با توجه به شکل، مجموعه‌های زیر را با اعضای آن‌ها مشخص کنید.



$A - B$ $\qquad$ $(A \cap B) \cup C$

پاسخ

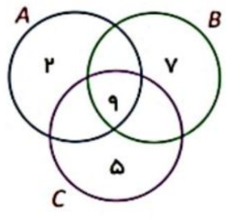
طبق شکل، عضوهایی که در A بوده و در B نباشند: $A - B = \{۰, ۵\}$

چون $A \cap B = \{۳, -۵\}$ است:

$$(A \cap B) \cup C = \{۳, -۵\} \cup \{۱, ۳, -۲\} = \{۳, -۵, ۱, -۲\}$$

---✲---

مثال: با توجه به نمودار مقابل؛



الف) مجموعه‌ی زیر را با اعضایش مشخص کنید.

$$(A\cup B)-C=$$

ب) داخل مربع علامت مناسب ($\in$، $\notin$، $\subseteq$ یا $\not\subseteq$) قرار دهید.

$\{۹\}\ \square\ A \qquad ۵\ \square\ B$

پاسخ

الف) در شکل می‌بینید که:

$$A\cup B=\{۲,۷,۹\} \quad \text{و} \quad C=\{۵,۹\}$$

جواب عضوهایی است که در $A\cup B$ باشند ولی در C نباشند:

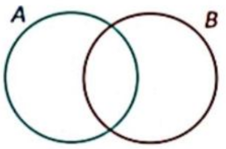
$$(A\cup B)-C=\{۲,۷\}$$

ب) چون ۹ عضو A هست، پس $\{۹\}\subseteq A$. ولی عدد ۵ در B قرار نداشته و می‌نویسیم: $۵\notin B$.

---❖---

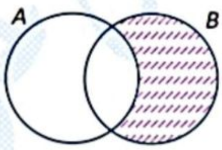
استان اصفهان - خرداد ۱۴۰۰

مجموعه‌ی $(B-A)\cap B$ را در نمودار روبه‌رو هاشور بزنید.



پاسخ

باید بین $B-A$ و B، قسمت‌های مشترک را هاشور بزنیم که همان $B-A$ خواهد شد:



---❖---

مثال: (از کتاب) مجموعه‌های $\mathbb{Z}-\mathbb{N}$ و $\mathbb{N}-\mathbb{Z}$ و $W-\mathbb{N}$ را تشکیل دهید.

پاسخ

تمام موارد به آسانی نوشته می‌شوند:

$$\mathbb{Z}-\mathbb{N}=\{۰,-۱,-۲,-۳,\dots\} \qquad \mathbb{N}-\mathbb{Z}=\{\ \}=\varnothing \qquad W-\mathbb{N}=\{۰\}$$

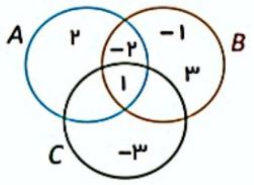
---❖---

پای تخته

۵. اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۳,۵,۱\}$، مجموعه‌های زیر را با اعضایشان مشخص کنید.

- $B\cap(A-B)$
- $(A-B)\cup(A\cap B)$

مثال: با توجه به نمودار ون مقابل:



الف) در جاهای خالی نماد مناسب قرار دهید:

$$۱ \ \square \ C \qquad و \qquad \{۲,-۱\} \ \square \ B\cup C$$

ب) مجموعه‌ی بیان شده‌ی زیر را با نماد نوشته و مشخص کنید:

عضوهایی که در B بوده، ولی در هر دوی A و C نباشند.

پاسخ

الف) با توجه به مجموعه‌ها و عضوهای موجود در آن‌ها:

$$۱\in C \qquad و \qquad \{۲,-۱\}\not\subseteq B\cup C$$

ب) باید مجموعه‌ی B را در نظر گرفته و تمام عضوهایی که در هر دوی A و C هستند را حذف کنیم:

$$B-(A\cap C)=\{-۲,-۱,۱,۳\}-(\{-۲,۲,۱\}\cap\{۱,-۳\})$$
$$=\{-۲,-۱,۱,۳\}-\{۱\}=\{-۲,-۱,۳\}$$

با رسم نمودار مناسب، نمونه‌ی بعد را پاسخ دهید:

پای تخته

۶. در یک کلاس ۴۲ نفره، ۱۸ نفر ورزش نمی‌کنند و ۲۱ نفر عضو کتابخانه نیستند. اگر ۲ نفر هم ورزش نکنند و هم عضو کتابخانه نباشند، چند نفر هم ورزش می‌کنند و هم عضو کتابخانه هستند؟

جواب: ۵

پاسخ دهید (۳)

۱- اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۲,۴,۵\}$ و $C=\{۳,۵,۱\}$، هر یک از مجموعه‌های زیر و تعداد زیرمجموعه‌های هر کدام را تعیین کنید:

- $B\cap(A-C)$
- $(B-C)\cup(C\cap A)$
- $(B-A)\cap(C-B)$
- $(A\cap B)-(B\cup C)$

۲- اگر بدانیم $A\subset B$، عبارات زیر را ساده کنید:

- $A-B$
- $A\bigcup B$
- $A\bigcap B$
- $\varnothing\bigcup B$
- $\varnothing-A$

۳- فرض کنید داشته باشیم: $A=\{۱,m,۳\}$، $B=\{n|\ n\in\mathbb{N}\ ,۲\le n<۷\}$ و $C=\{۴,۵,۶\}$. مقدار m را طوری بیابید که تساوی زیر درست باشد:

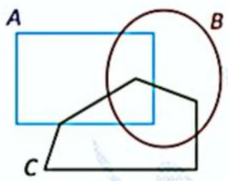
$$C=B-A$$

۴- آیا عبارت زیر همواره درست است؟

$$(A\bigcap B)\subset B\subset(A\bigcup B)$$

۵- مجموعه‌های داده شده‌ی زیر را در شکل‌های بالای هر کدام هاشور بزنید.

$(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$



$[(A\bigcup B)\bigcap C]-(B-A)$

۶- شکل‌های مناسبی رسم کنید و مانند تمرین قبل، مجموعه‌های زیر را هاشور بزنید:

- $(A\bigcap B)-A$
- $A-(A\bigcap B)$
- $(B-C)\bigcup(A\bigcap B)$
- $(A\bigcup B)-C$

منتخب کتاب:

۱- مجموعه‌های $A=\{۲,۴,۶,۸,۹\}$، $B=\{۱,۵,۷,۳,۹\}$ و $C=\{۱,۷,۱۰,۱۱\}$ را در نظر بگیرید. سپس هر یک از مجموعه‌های زیر را با عضو هایشان مشخص کنید:

الف) $B\bigcup C$ ب) $(A-C)\bigcup(B-C)$ پ) $(A\bigcup B)-C$

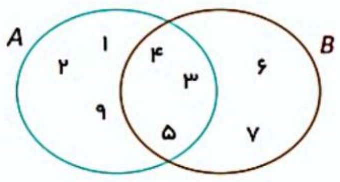
ت) $\varnothing\bigcup C$ ث) $A\bigcap\varnothing$

۲- با توجه به نمودار مقابل، عبارت‌های درست یا نادرست را مشخص کنید.

الف) $(A-B)\bigcup(A\bigcap B)=A$

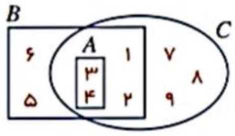
ب) $(A-B)\bigcup(B-A)=\{۱,۲,۶\}$

پ) $n(A-B)=n(B-A)$

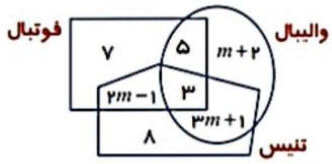


چالش (ویژه علاقمندان)

الف) با توجه به شکل روبه‌رو، تعداد عضوهای مجموعه‌ی $(A-B)\cup(C-A)$ را تعیین کنید.



ب) با توجه به نمودار زیر، اگر تعداد افرادی که تنها به یک ورزش علاقه دارند ۲۱ نفر باشد، چند نفر تنها به دو ورزش علاقمند هستند؟



۴ مجموعه و احتمال

مجموعه‌ی $A=\{۰,۱,۲,۳,\ ...\ ,۹\}$ دارای ده عضو است و به همین دلیل می‌نویسیم:

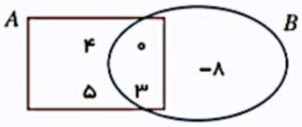
$$n(A)=۱۰$$

یعنی:

نماد $n(A)$، تعداد عضوهای مجموعه‌ی A را نشان می‌دهد.

نهایی کشوری - خرداد ۱۴۰۲

با توجه به نمودار ون مقابل، جاهای خالی را کامل کنید.



الف) $A\cap B=\{\qquad\}$

ب) $B-A=\{\qquad\}$

پ) $n(A\cup B)=$

پاسخ

طبق آن‌چه گفته‌ایم:

$$A\cap B=\{۰,۳\} \quad و \quad B-A=\{-۸\}$$

چون $A\cup B=\{۴,۵,۰,۳,-۸\}$ است، در نتیجه: $n(A\cup B)=۵$.

مفهوم احتمال و محاسبه‌ی آن را سال قبل دیده‌ایم. در این بخش، احتمال و روش محاسبه را با استفاده از مجموعه‌ها با دقت بیشتری معرفی و بررسی خواهیم کرد.

چند مفهوم:

یک آزمایش شانسی (یعنی: نتیجه قبل از انجام نامشخص باشد)، مثلاً پرتاب یک تاس را در نظر بگیرید:

- مجموعه‌ی تمام نتایج ممکن در انجام این آزمایش را با S نشان می‌دهیم. بنابراین در این مثال:

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

مجموعه‌ی S **«فضای نمونه‌ای»** نام دارد.

- در هر آزمایش، هدف تعیین احتمال برخی اتفاق‌های خاصِ مورد نظر (مطلوب) است. اعضای هر حالت مطلوب را داخل یک مجموعه نوشته و به آن یک **«پیشامد»** یا **«پیشامد تصادفی»** گوئیم. در نتیجه:

پیشامدها، همه‌ی زیر مجموعه‌های S هستند.

محاسبه احتمال:

احتمال رخ دادن یک پیشامد A را با $P(A)$ نشان داده و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(A)=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}} \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

برای نمونه:

احتمال آمدن عددی اول در پرتاب یک تاس را حساب می‌کنیم (سؤال نهایی- خرداد ۱۴۰۳). تعداد کل حالت‌ها ۶ و حالت‌های مطلوب $\{۲,۳,۵\}$ است. مقدار احتمال:

$$\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

شهر تهران- خرداد ۱۴۰۲

ده کارت یکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داخل جعبه قرار می‌دهیم و به طور تصادفی یک کارت بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد عدد روی کارت خارج شده از ۵ کمتر باشد؟

پاسخ

تمام عددهای ممکن $S=\{۱,۲,۳,\ldots,۱۰\}$ و حالات مطلوب $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ است. بنابراین:

$$n(A)=۴\ ,\ n(S)=۱۰\ \Rightarrow\ P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

مثال: در پرتاب یک تاس، احتمال این که عدد رو آمده اول باشد، برابر $\frac{۱}{۳}$ است. (درست ☐ نادرست ☐)

پاسخ

نادرست است، چون:

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\ ,\ A=\{۲,۳,۵\}\ \Rightarrow\ P(A)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

مثال: یک تاس را پرتاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که عدد ظاهر شده:

الف) مضرب ۵ باشد.   ب) کوچک‌تر از ۵ باشد.   پ) عدد اول دو رقمی باشد.

پاسخ

مجموعه‌ی $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ را در نظر گرفته و توسط آن هر پیشامد را تعیین می‌کنیم:

الف) تنها عددی در S که مضرب ۵ باشد، خودش است:

$$A=\{۵\}\ \rightarrow\ P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۶}$$

ب) اعداد کوچک‌تر از ۵ که در S هستند:

$$B=\{۱,۲,۳,۴\}\ \rightarrow\ P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۴}{۶}\ \rightarrow\ P(B)=\frac{۲}{۳}$$

پ) هیچ عددی در S دو رقمی نیست و بنابراین پیشامد این قسمت تهی است:

$$C=\{\ \}\ \rightarrow\ P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۰}{۶}\ \rightarrow\ P(C)=۰$$

به صورت مشابه انجام دهید . . .

پای تخته

۷. در ظرفی ۱۵ کارت با شماره‌های ۱، ۲، ۳، . . . و ۱۵ قرار دارد. یک کارت به صورت تصادفی (شانسی) از ظرف خارج می‌کنیم. مجموعه‌ی S را نوشته و توسط آن تعیین کنید احتمال آن که عدد روی کارت:

الف) دو رقمی باشد.

ب) بین ۵ و ۱۰ باشد.

پ) عدد اول فرد باشد.

جواب: $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۴}{۱۵}$ و $\frac{۱}{۳}$

گاهی با انجام آزمایش، دو نوع نتیجه یا حتی بیشتر ظاهر می‌شود؛ در چنین حالت‌هایی لازم است مجموعه‌ی S و پیشامدهای آن را به صورتی خاص و مناسب بنویسیم. به تفاوت فضای نمونه‌ای در دو مثال بعدی توجه کنید.

مثال: در پرتاب یک سکه، مجموعه‌ی S چنین نوشته می‌شود:

$$S = \{\text{ر} \,,\, \text{پ}\}$$

که در آن «ر» نشان دهنده‌ی ظاهر شدن روی سکه و «پ» نشان دهنده‌ی پشت سکه است.

مثال: فرض کنید دو سکه را پرتاب کرده‌ایم. مجموعه‌ی S را تشکیل داده و احتمال موارد زیر را محاسبه کنید.

الف) هر دو سکه رو بیاید.

ب) فقط یک سکه پشت بیاید.

پاسخ

توجه کنید:

هربار این آزمایش انجام شود، دو نتیجه مشاهده خواهد شد: نتیجه‌ی سکه‌ی اول و نتیجه‌ی سکه‌ی دوم.

فرض کنید در سکه‌ی اول رو و در سکه‌ی دوم پشت ظاهر شده باشد؛ این نتیجه را در S به صورت زیر نشان خواهیم داد:

(پ , ر)

بنابراین تمام حالات ممکن به صورت زیر S را تشکیل می‌دهند:

$$S = \{(\text{ر},\text{ر}), (\text{پ},\text{ر}), (\text{ر},\text{پ}), (\text{پ},\text{پ})\} \quad \rightarrow \quad n(S) = ۴$$

الف) حالتی که هر دو سکه رو آمده باشد، فقط یک حالت است:

$$A = \{(\text{ر},\text{ر})\} \quad \rightarrow \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۴}$$

ب) با توجه به S، پیشامد آن که فقط یک سکه پشت بیاید را می‌نویسیم:

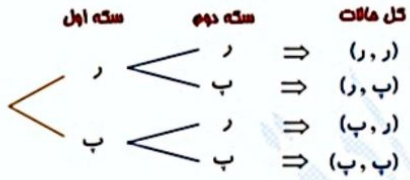
$$B=\{(\text{ر},\text{پ}),(\text{پ},\text{ر})\} \rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۲}{۴} \rightarrow P(B)=\frac{۱}{۲}$$

نمودار درختی:

روشی آسان برای نوشتن مجموعه‌ی S هنگامی که اعضای آن دو یا چند نتیجه را نشان می‌دهند، استفاده از «نمودار درختـی» به صورت زیر است. برای نمونه، وقتی دو سکه پرتاب می‌شود:

- سکه‌ی اول می‌تواند رو یا پشت ظاهر شود:

- در هر یک از دو حالتی که برای سکه‌ی اول رخ می‌دهد، سکه‌ی دوم ممکن است رو یا پشت ظاهر گردد:



می‌بینید که:

حرکتِ از ریشه به سمت برگ‌ها (از چپ به راست)، تمام عضوهای S یا پیشامدهای مورد نظر را مشخص می‌کند.

مثال: یک سکه و یک تاس را هم‌زمان پرتاب می‌کنیم.

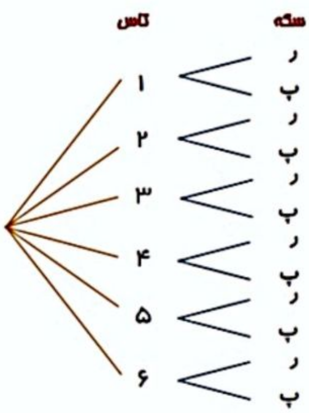
الف) تعداد حالت‌های ممکن را بنویسید.

ب) احتمال آن‌که سکه رو و تاس عدد فرد ظاهر شود چقدر است؟

پ) احتمال آن‌که سکه پشت بیاید چقدر است؟

پاسخ

الف) می‌توانید برای نوشتن عضوهای S از نمودار درختی استفاده کنید (البته استفاده از نمودار درختی برای فهم ساده‌تر بوده و اجباری نیست):



$$S=\{(\text{ر},۱),(\text{پ},۱),(\text{ر},۲),(\text{پ},۲),(\text{ر},۳),(\text{پ},۳),(\text{ر},۴),(\text{پ},۴),(\text{ر},۵),(\text{پ},۵),(\text{ر},۶),(\text{پ},۶)\}$$

می‌بینید که S دارای ۱۲ عضو است؛ یعنی: $n(S)=۱۲$.

ب) با نگاه به مجموعه‌ی S حالت‌های مطلوبِ این قسمت را می‌نویسیم:

$$A=\{(\text{ر},۱),(\text{ر},۳),(\text{ر},۵)\}$$

در نتیجه:

$$P(A)=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$$

پ) توجه کنید که در این قسمت برای تاس هر عددی می‌تواند ظاهر شود، ولی سکه فقط پشت قبول است:

$$B=\{(۱, پ), (۲, پ), (۳, پ), (۴, پ), (۵, پ), (۶, پ)\}$$

در نتیجه:

$$P(B)=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$$

---✿---

نوبت شماست . . .

پای تخته

۸. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. مجموعه‌ی S را تشکیل داده و احتمال موارد زیر را بیابید:

الف) هر دو عدد ظاهر شده فرد باشند.

ب) جمع دو عدد ظاهر شده کوچک‌تر از ۶ باشد.

پ) عددِ تاس اول از عددِ تاس دوم کوچک‌تر باشد.

جواب: به ترتیب $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۵}{۱۸}$ و $\frac{۵}{۱۲}$

آذربایجان شرقی - خرداد ۱۴۰۰

اگر تاسی را دو بار بیندازیم، چقدر احتمال دارد هر دو عدد رو شده مضرب ۳ باشند؟

پاسخ

S دارای $۶\times۶=۳۶$ عضو است. حالات مطلوب:

$$A=\{(۳,۳),(۳,۶),(۶,۳),(۶,۶)\}$$

در نتیجه:

$$P(A)=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

---✿---

پاسخ دهید (۴)

۱- از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,...,۱۶\}$ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد:

الف) عدد انتخاب شده مضرب پنج باشد.

ب) عدد انتخاب شده دو رقمی باشد.

۲- خانواده‌ای دارای سه فرزند است.

الف) با رسم نمودار درختی، مجموعه‌ی S مربوط به جنسیت فرزندان را بنویسید.

ب) چقدر احتمال دارد که فقط یک فرزند دختر باشد.

پ) چقدر احتمال دارد که لااقل یک فرزند دختر باشد.

ت) چقدر احتمال دارد که تعداد دخترها از تعداد پسرها بیشتر باشد.

۳- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم.

الف) مجموعه‌ی S را بنویسید.

ب) چقدر احتمال دارد هر دو تاس عدد اول بیایند.

پ) چقدر احتمال دارد عدد تاس اول از عدد تاس دوم کوچک‌تر بیاید.

ت) چقدر احتمال دارد مجموع دو عدد تاس‌ها برابر ۹ باشد.

منتخب کتاب:

۱- در جعبه‌ای ۳ مهره‌ی قرمز، ۴ مهره‌ی آبی و ۵ مهره‌ی سبز وجود دارد. اگر یک مهره را تصادفی از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد:

الف) این مهره آبی باشد. ب) این مهره سبز نباشد. پ) این مهره قرمز یا سبز باشد.

۲- اگر تاسی را دو بار بیندازیم (یا دو تاس آبی و قرمز را با هم بیندازیم)، چقدر احتمال دارد:

الف) هر دو بار، عدد اول رو شود. ب) دو عدد رو شده، مثل هم باشد.

پ) دو عدد رو شده، مضرب ۳ باشند. ت) مجموع دو عدد ۷ باشد.

چالش (ویژه علاقمندان) CHALLENGE

۱- اگر $P(A)=0/2$ و $n(A)=8$ و $n(B)=5$ باشد، مقدار $P(B)$ را حساب کنید.

۲- اتاقی داریم که کف آن از کاشی‌های مربع شکل پوشیده شده است. طول اتاق شامل ۸ و عرض آن شامل ۵ کاشی است. اگر یکی از کاشی‌ها را به طور تصادفی انتخاب کنیم، احتمال آن‌که این کاشی، کاشیِ کنج یا کناره‌های اتاق باشد، را حساب کنید.

پاسخ‌نامه

فعالیت‌های پای تخته فصل اول

۱- فقط موارد (الف) و (ت) تابع و اعضای آن‌ها مشخص هستند.

ولی در قسمت‌های (ب) و (پ) و (ث):

اعضاء آن‌ها به سلیقه افراد بستگی دارد.

۲- در مورد مجموعه‌ی A، ابتدا معادله را حل می‌کنیم تا آن مشخص گردد:

$$-۳x-۵=-۲ \rightarrow -۳x=-۲+۵ \rightarrow -۳x=۳ \rightarrow x=\frac{۳}{-۳}=-۱$$

پس $A=\{-۱\}$ بوده و دارای دو زیرمجموعه‌ی $\varnothing$ و $\{-۱\}$ است.

زیر مجموعه‌های $B=\{۱,۲,\{۳\}\}$ را از عضوهای کمتر به بیشتر می‌نویسیم:

$$\varnothing \ , \ \{۱\} \ , \ \{۲\} \ , \ \{\{۳\}\} \ , \ \{۱,۲\} \ , \ \{۱,\{۳\}\} \ , \ \{۲,\{۳\}\} \ , \ \{۱,۲,\{۳\}\}$$

مشاهده می‌کنید که مجموعه‌ی B دارای ۳ عضو و دارای ۸ زیر مجموعه است.

۳- الف) با کمی توجه مشاهده می‌کنید که اعضای مجموعه‌ی داده شده مجذور عددهای حسابی هستند:

$$۰,۱,۴,۹,۱۶,\ldots \quad \rightarrow \quad ۰^۲,۱^۲,۲^۲,۳^۲,۴^۲,\ldots$$

در نتیجه این مجموعه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\{k^۲ \mid k\in W\}$$

ب) توجه کنید که اگر عددهای $۱,۴,۹,۱۶,\ldots$ یک واحد کم کنیم، عددهای $۰,۳,۸,۱۵,۲۴,\ldots$ به‌دست می‌آیند:

$$۰,۳,۸,۱۵,۲۴,\ldots \quad \rightarrow \quad ۱-۱,۴-۱,۹-۱,۱۶-۱,۲۵-۱,\ldots \quad \Rightarrow \quad ۱^۲-۱,۲^۲-۱,۳^۲-۱,۴^۲-۱,\ldots$$

در نتیجه این مجموعه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\{k^۲-۱ \mid k\in \mathbb{N}\}$$

۴- عددهای صحیح در محدوده‌ی عبارتند از ۲−، ۱− و صفر. در نتیجه مجذورهای آن‌ها مجموعه را تشکیل می‌دهند:

$$A=\{۰^۲,(-۱)^۲,(-۲)^۲\} \Rightarrow A=\{۰,۱,۴\}$$

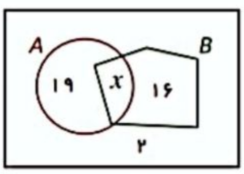
۵- مورد اول: با رعایت ترتیب (ابتدا داخل پرانتز را می‌نویسیم):

$$B\cap(A-B)=\{۳,۵,۱\}\cap\big(\{۱,۲,۳\}-\{۳,۵,۱\}\big)=\{۳,۵,۱\}\cap\{۲\}=\varnothing$$

مورد دوم: مشابه قسمت قبل:

$$(A-B)\cup(A\cap B)=\big(\{۱,۲,۳\}-\{۳,۵,۱\}\big)-\big(\{۱,۲,۳\}\cap\{۳,۵,۱\}\big)$$
$$=\{۲\}-\{۱,۳\}=\{۲\}$$

۶- کل افراد کلاس را در یک مستطیل تصور کرده و «افرادی که ورزش می‌کنند» و «افرادی که عضو کتابخانه هستند» را به ترتیب با A و B نشان می‌دهیم. اکنون در شکل مقابل، تعداد افراد هر بخش را در شکل می‌نویسیم:



- دو نفر که ورزش نمی‌کنند و عضو کتابخانه نیستند را خارج دو مجموعه قرار می‌دهیم. پس ۴۰ نفر داخل این دو مجموعه جای دارند.
- چون ۱۸ نفر ورزش نمی‌کنند، پس ۱۶ نفر (جدای از ۲ نفر قبلی) خارج A قرار دارند.
- همچنین: چون ۲۱ نفر عضو کتابخانه نیستند، پس ۱۹ نفر هم خارج B قرار می‌گیرند.
- تعداد افراد مشترک را هم با x نشان می‌دهیم.

چون کل افراد ۴۲ نفر بوده است، بنابراین:

$$۱۹+x+۱۶+۲=۴۲ \to x+۳۷=۴۲ \Rightarrow x=۴۲-۳۷=۵$$

۷- مجموعه‌ی تمام حالت‌های ممکن عبارت است از:

$$S=\{۱,۲,۳,\ldots,۱۴,۱۵\} \to n(S)=۱۵$$

الف) عددهای دو رقمی موجود در S را می‌نویسیم:

$$A=\{۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵\} \to n(A)=۶ \Rightarrow P(A)=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$$

ب) عددهای بین ۵ و ۱۰ در S را می‌نویسیم:

$$B=\{۶,۷,۸,۹\} \to n(B)=۴ \Rightarrow P(B)=\frac{۴}{۱۵}$$

پ) مشابه دو قسمت قبل، پیشامد را نوشته و احتمال را محاسبه می‌کنیم:

$$C=\{۳,۵,۷,۱۱,۱۳\} \to n(C)=۵ \Rightarrow P(C)=\frac{۵}{۱۵}=\frac{۱}{۳}$$

۸- برای درک بهتر و یا اگر لازم است، از نمودار درختی استفاده کنید؛ مجموعه‌ی تمام حالت‌ها به صورت زیر است:

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),\ldots,(۱,۶),(۲,۱),(۲,۲),\ldots,(۲,۶),(۳,۱),(۳,۲),\ldots,(۶,۶)\} \to n(S)=۳۶$$

توجه کنید یک عضو S مانند (۲,۱) به این معنی است که تاس اول عدد ۲ و تاس دوم عدد ۱ آمده است.

الف) پیشامد هر دو عدد فرد به صورت زیر است:

$$A=\{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵),(۳,۱),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۱),(۵,۳),(۵,۵)\} \to n(A)=۹$$

در نتیجه:

$$P(A)=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

ب) تمام عضوهایی که جمع دو عدد آن‌ها کمتر از ۶ است را می‌نویسیم:

$$B=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱)\} \to n(A)=۱۰$$

در نتیجه:

$$P(B)=\frac{۱۰}{۳۶}=\frac{۵}{۱۸}$$

پ) تمام عضوهایی از S که عدد اول از عدد دوم کمتر است را می‌نویسیم:

$$C=\{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶),(۴,۵),(۴,۶),(۵,۶)\}$$
$$\to n(C)=۱۵$$

در نتیجه: $P(C)=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$

ریاضی
پایه نهم

۲

حساب عددهای حقیقی